

## 第2章 確率分布と統計的な推測

## ●Check! (p.B2-4)

1

袋の中に数字 1, 2, 3 を記入した玉が、それぞれ、1 個、2 個、3 個の合計 6 個入っている。この袋から 2 個の玉を同時に取り出し、それぞれに記入されている数の和を  $X$  とする。 $X$  の確率分布を求めよ。また、平均、分散および標準偏差を求めよ。

数字 1, 2 の玉を 1 個ずつ取り出すとき、 $X=3$  で、

$$\text{その確率は, } \frac{1 \times 2 C_1}{6 C_2} = \frac{2}{15}$$

数字 1, 3 の玉を 1 個ずつ取り出すとき、 $X=4$  で、

$$\text{その確率は, } \frac{1 \times 3 C_1}{6 C_2} = \frac{3}{15}$$

数字 2 の玉を 2 個取り出すとき、 $X=4$  で、

$$\text{その確率は, } \frac{1}{6 C_2} = \frac{1}{15}$$

数字 2, 3 の玉を 1 個ずつ取り出すとき、 $X=5$  で、

$$\text{その確率は, } \frac{2 C_1 \times 3 C_1}{6 C_2} = \frac{6}{15}$$

数字 3 の玉を 2 個取り出すとき、 $X=6$  で、

$$\text{その確率は, } \frac{3 C_2}{6 C_2} = \frac{3}{15}$$

以上から、 $X$  の確率分布は次の表のようになる。

$X$	3	4	5	6	計
$P$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\begin{aligned} \text{平均は, } E(X) &= 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{2}{5} + 6 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{70}{15} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

分散は、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$  であり、

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 3^2 \times \frac{2}{15} + 4^2 \times \frac{4}{15} + 5^2 \times \frac{2}{5} + 6^2 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{340}{15} = \frac{68}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$V(X) = \frac{68}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\text{標準偏差は, } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

◀ 2 の玉は 2 個ある。

◀ 3 の玉は 3 個ある。

◀  $X=4$  となる確率は、  
 $\frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$

◀ 本書では、解答の  $P$  を既約分数にしている。

◀  $E(X)$   
 $= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

2

確率変数  $X$  の確率分布が右の表で与えられ、標準偏差が 2 であるとき、正の定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。

$X$	$3a$	$a$	$a-1$	計
$P$	$3b$	$5b$	$2b$	1

全事象の確率は 1 であるから、 $3b + 5b + 2b = 1$

$$\text{よって, } b = \frac{1}{10}$$

◀  $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

## B2-2 (98) 第2章 確率分布と統計的な推測

標準偏差は、 $\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - \{E(X)\}^2} = 2$  であるから、  
 $E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 4$  ……①

ここで、平均は、

$$E(X) = 3a \cdot 3b + a \cdot 5b + (a-1) \cdot 2b = 16ab - 2b$$

$$b = \frac{1}{10} \text{ を代入して, } E(X) = \frac{1}{5}(8a-1)$$

$$\text{また, } E(X^2) = (3a)^2 \cdot 3b + a^2 \cdot 5b + (a-1)^2 \cdot 2b \\ = 34a^2b - 4ab + 2b$$

$$b = \frac{1}{10} \text{ を代入して,}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{5}(17a^2 - 2a + 1)$$

$$\text{よって, ①は, } \frac{1}{5}(17a^2 - 2a + 1) - \frac{1}{25}(8a-1)^2 = 4$$

$$\text{これを整理すると, } (7a+16)(a-2) = 0$$

$$a \text{ は正の定数より, } a = 2$$

$$\text{したがって, } a = 2, b = \frac{1}{10}$$

$$\blacktriangleleft E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots \\ \cdots + x_np_n$$

①に

$$E(X^2) = \frac{1}{5}(17a^2 - 2a + 1)$$

$$E(X) = \frac{1}{5}(8a-1) \text{ を代入}$$

3

- (1) 確率変数  $X$  の確率分布が、右の表のように与えられている。このとき、 $Y = aX + b$  ( $a, b$  は定数) で決まる確率変数  $Y$  の平均は  $E(Y) = aE(X) + b$  であることを示せ。

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$	計
$P$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_n$	1

- (2) 赤玉が5個、白玉が3個入った箱から同時に4個の玉を取り出し、取り出した赤玉1個につき10ポイントもらえるゲームを行う。ただし、ゲーム1回ごとに参加料25ポイントを払うものとする。  
 このゲームを1回行ったとき、取り出された赤玉の個数を  $X$  とし、参加料を差し引いて得るポイント数を  $Y$  として、 $Y$  の平均を求めよ。

- (1) 確率変数  $X$  が  $X = x_k$  と

なる確率は  $p_k$  で、 $X = x_k$

に対応する確率変数  $Y$  は

$y_k = ax_k + b$  である。つまり、確率変数  $Y$  の確率分布は右上の表ようになる。

$Y$  の確率分布から、 $Y$  の平均  $E(Y)$  は、

$$E(Y) = y_1p_1 + y_2p_2 + \cdots + y_np_n \\ = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \cdots \\ \cdots + (ax_n + b)p_n \\ = a(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n) \\ + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

したがって、 $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = E(X)$ 、  
 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$  より、

$$E(Y) = aE(X) + b$$

- (2) ゲームを1回行って取り出された赤玉の個数が  $X$  であるとき、参加料を差し引いて得られるポイント数  $Y$  は、  
 $Y = 10X - 25$

さらに、(1)の結果から、 $Y$  の平均は、

$$E(Y) = E(10X - 25) = 10E(X) - 25 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

①まずは  $Y$  の確率分布を求める。

②式を整理して、  
 $aE(X)$   
 $= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots \\ \cdots + x_np_n)$   
 の形を作る。

ここで、 $X=1$  である確率は、 $\frac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{{}_8C_4} = \frac{5}{70}$

$X=2$  である確率は、 $\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{{}_8C_4} = \frac{30}{70}$

$X=3$  である確率は、 $\frac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{{}_8C_4} = \frac{30}{70}$

$X=4$  である確率は、 $\frac{{}_5C_4 \times {}_3C_0}{{}_8C_4} = \frac{5}{70}$

よって、 $X$  の平均は、

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{70} + 2 \times \frac{30}{70} + 3 \times \frac{30}{70} + 4 \times \frac{5}{70} \\ = \frac{175}{70} = \frac{5}{2}$$

したがって、①より、 $Y$  の平均は、

$$E(Y) = 10E(X) - 25 \\ = 10 \times \frac{5}{2} - 25 = 0$$

◀  $X$  の確率分布は次のようになる。

$X$	1	2	3	4	計
$P$	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$	1

( $P$ は約分して  $\frac{\bigcirc}{14}$  などとして  
もよい)

◀ 分母をそろえておくと、平均の計算がやりやすい。

4

100 円硬貨 1 枚、50 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき、表の出た硬貨の金額の和の平均と分散を求めよ。

表が出た 100 円硬貨と 50 円硬貨の枚数をそれぞれ  $X$ 、 $Y$  とすると、 $X$ 、 $Y$  は独立な確率変数で、金額の和  $Z=100X+50Y$  も、確率変数である。

よって、 $Z$  の平均は、

$$E(Z) = 100E(X) + 50E(Y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $X$ 、 $Y$  は独立であるから、 $Z$  の分散は、

$$V(Z) = 100^2 V(X) + 50^2 V(Y) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$X$ 、 $Y$  の確率分布は、それぞれ次のようになる。

$X$	0	1	計
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$Y$	0	1	2	計
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって、 $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

したがって、①より、金額の和  $Z$  の平均は、

$$E(Z) = 100 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot 1 = 100$$

また、 $E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  より、

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$  より、

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

したがって、②より、金額の和  $Z$  の分散は、

$$V(Z) = 100^2 \times \frac{1}{4} + 50^2 \times \frac{1}{2} = 3750$$

◀ 本編 p.B2-8 参照

◀ 本編 p.B2-8 参照

◀ 平均を求めるので約分しない方が計算が楽である。

**B2-4** (100) 第2章 確率分布と統計的な推測

以上から、金額の和  $Z$  の平均は **100**、分散は **3750**

**5**

A の袋には 1, 1, 2, 2, 3 の 5 枚のカードが、B の袋には 4, 5, 5, 6, 6, 6 の 6 枚のカードが入っている。この A, B の袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき、カードに書かれている数の積の平均を求めよ。

A, B の袋から取り出すカードに書かれている数を、それぞれ  $X, Y$  とすると、 $X, Y$  の確率分布は次のようになる。

$X$	1	2	3	計
$P$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$Y$	4	5	6	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

$X, Y$  は独立であるから、 $X, Y$  の積の平均は、

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$E(Y) = 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{2}{6} + 6 \times \frac{3}{6} = \frac{16}{3}$$

したがって、 $\textcircled{1}$ に  $E(X), E(Y)$  の値を代入して、

$$E(XY) = \frac{9}{5} \times \frac{16}{3} = \frac{48}{5}$$

◀ 平均を求めるので約分しない。

◀ 独立な確率変数の積の平均  
 $X, Y$  が独立のとき、  
 $E(XY) = E(X)E(Y)$

**6**

10 円硬貨を 5 枚投げる。次の確率変数の平均、分散および標準偏差を求めよ。

- (1) 表の出る枚数  $X$
- (2) 表の出る硬貨の合計金額  $Y$

- (1) 確率変数  $X$  は、 $n=5, p=\frac{1}{2}$  の二項分布  $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$  に

従うので、 $X$  の平均は、

$$E(X) = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

また、 $q=1-p=\frac{1}{2}$  とすると、 $X$  の分散は、

$$V(X) = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

よって、 $X$  の標準偏差は、

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

以上より、 $X$  の平均  $\frac{5}{2}$ 、分散  $\frac{5}{4}$ 、標準偏差  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

- (2)  $Y=10X$  であるから、

$$Y \text{ の平均は, } E(Y) = 10E(X) = 10 \times \frac{5}{2} = 25$$

$$Y \text{ の分散は, } V(Y) = 10^2 V(X) = 10^2 \times \frac{5}{4} = 125$$

よって、 $Y$  の標準偏差は、

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

以上より、 $Y$  の平均 **25**、分散 **125**、標準偏差  **$5\sqrt{5}$**

◀ 表の出る確率は  $\frac{1}{2}$

◀ 二項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $X$  において、  
 $E(X) = np, V(X) = npq,$   
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}$   
 $(q=1-p)$

◀  $Y=aX+b$  のとき、  
 $E(Y) = aE(X) + b$   
 $V(Y) = a^2 V(X)$   
 $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = |a|\sigma(X)$

## ●練習

## B2.1

数字の書かれた玉①, ②, ③, ④, ⑤がそれぞれ2個ずつ入っている袋の中から3個の玉を取り出すとき, 玉に書かれている数の最大値を  $X$  とする.

- (1)  $P(X=4)$  を求めよ.  
 (2)  $X$  の確率分布を求めよ.  
 (3)  $X$  の平均 (期待値) を求めよ.

- (1) ④を2個と, ①, ①, ②, ②, ③, ③から1個取り出す確率は,

$$\frac{1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{6}{120}$$

- ④を1個と, ①, ①, ②, ②, ③, ③から2個取り出す確率は,

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{30}{120}$$

$$\text{よって, } P(X=4) = \frac{6}{120} + \frac{30}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

- (2) 確率変数  $X$  のとり得る値は2, 3, 4, 5である.

(1)と同様に考えて,

$$P(X=2) = \frac{1 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_2C_1 \times 1}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{1 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{16}{120}$$

$$P(X=5) = \frac{1 \times {}_8C_1}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_2C_1 \times {}_8C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{64}{120}$$

よって, 最大値  $X$  の確率分布は次のようになる.

$X$	2	3	4	5	計
$P$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$	1

- (3) 最大値  $X$  の平均は,

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{30} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{13}{3}$$

## B2.2

赤玉4個と白玉3個が入っている袋から, 3個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉の個数を  $X$ , 白玉の個数を  $Y$  とする.  $E(X) = \frac{12}{7}$ ,  $V(X) = \frac{24}{49}$ ,  $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$  であることを用いて,  $Y$  の平均  $E(Y)$ , 分散  $V(Y)$ , 標準偏差  $\sigma(Y)$  を求めよ.

$X+Y=3$  であるから,  $Y = -X+3$

$$E(X) = \frac{12}{7}, V(X) = \frac{24}{49}, \sigma(X) = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ であるから,}$$

$$E(Y) = E(-X+3) = -E(X)+3 = -\frac{12}{7}+3 = \frac{9}{7}$$

$$V(Y) = V(-X+3) = (-1)^2 V(X) = \frac{24}{49}$$

$$\sigma(Y) = \sigma(-X+3) = |-1| \sigma(X) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

◀最大値の書かれた玉を2個とも取り出すとき, 1個だけ取り出すときに分けて考える.

◀10個の玉から3個取り出す方法は,

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 (\text{通り})$$

◀①, ①, ②または①, ②, ②のとき,  $X$  は最大値2をとる.

◀本書では, 解答の  $P$  を既約分数で表している.

$$\begin{aligned} \text{◀} E(X) \\ = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \end{aligned}$$

◀ $Y$  は  $X$  の1次式で表される.

$$\text{◀} E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$\text{◀} V(aX+b) = a^2 V(X)$$

$$\begin{aligned} \text{◀} \sigma(aX+b) &= |a| \sigma(X) \\ \sigma(Y) &= \sqrt{V(Y)} \text{ でもよい.} \end{aligned}$$

## B2-6 (102) 第2章 確率分布と統計的な推測

## B2.3

目が1, 1, 1, 2, 3, 3のさいころAと、目が3, 4, 5, 5, 6, 7のさいころBを同時に1回投げ、さいころAとさいころBの出た目の数をそれぞれ縦、横の長さとする長方形を作る。この長方形の面積 $S$ の平均を求めよ。

さいころAの目の数を $X$ 、さいころBの目の数を $Y$ とすると、面積 $S$ は、 $S=XY$

また、 $X, Y$ は独立な確率変数で、 $X, Y$ の確率分布は、それぞれ次のようになる。

$X$	1	2	3	計
$P$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

$Y$	3	4	5	6	7	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$X, Y$ は独立より、 $E(XY)=E(X)E(Y)$  ……①

$$\text{ここで、} E(X)=1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

$$E(Y)=3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{2}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{30}{6} = 5$$

であるから、①より、長方形の面積 $S$ の平均は、

$$E(S)=E(XY)=\frac{11}{6} \times 5 = \frac{55}{6}$$

◀平均を求めるので約分しない。

◀ $X, Y$ の積の平均  
 $X, Y$ が独立ならば、  
 $E(XY)=E(X)E(Y)$

2

## B2.4

A, Bの2つの野球チームが5試合行う。引き分けはないものとし、各試合でAチームがBチームに勝つ確率は $\frac{5}{8}$ である。

- (1) Aチームが勝った試合数を $X$ とすると、 $X$ の平均と標準偏差を求めよ。  
(2) 勝った試合数の2乗の勝ち点がもらえると、Aチームの勝ち点の平均を求めよ。

各試合でAチームが負ける確率は、 $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

- (1) 確率変数 $X$ が $X=k$ となる確率は、

$$P(X=k) = {}_5C_k \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{5-k}$$

$$(k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$X$ は二項分布 $B\left(5, \frac{5}{8}\right)$ に従うから、

$$X \text{の平均は、} E(X)=5 \times \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$$

$$\text{標準偏差は、} \sigma(X)=\sqrt{5 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

- (2) Aチームの勝ち点の平均は、 $E(X^2)$ である。

また、 $X$ の分散は、 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ であるから、 $E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

- (1)より、 $E(X)=\frac{25}{8}$ であり、 $\sqrt{V(X)}=\sigma(X)$ より、

$$V(X)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)^2 = \frac{75}{64}$$

であるから、勝ち点の平均は、

$$E(X^2)=\frac{75}{64} + \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{175}{16}$$

◀ $E(X)=np$

◀ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

◀分散の公式を利用する。

◀(1)の結果を利用する。  
 $V(X)=npq$ を利用して求めてもよい。

## B2.5

赤い本が2冊、青い本が $n$ 冊ある。この $n+2$ (冊)の本を無作為に1冊ずつ選び、本棚に左から並べていく。2冊の赤い本の間にある青い本の冊数を $X$ とすると、 $X$ の平均と分散を求めよ。

$n+2$ (冊)の本は区別がつくとすると、これらすべての並べ方は、 $(n+2)!$ 通りである。

$X=k$ (2冊の赤い本の間に青い本が $k$ 冊並ぶとき、ただし、 $0 \leq k \leq n$ )のとき、すべての本の並べ方を考える。

2冊の赤い本の並べ方は2通り

2冊の赤い本の間に、 $n$ 冊の青い本から $k$ 冊を選んで並べる方法は ${}_n P_k$ 通り

赤い本2冊とその間の青い本 $k$ 冊を1組として、この1組と残り $n-k$ (冊)の青い本を並べる並べ方は $(n-k+1)!$ 通り

以上から、 $X=k$ となる本の並べ方は、 $2 \cdot {}_n P_k \cdot (n-k+1)!$ 通りである。

$$\text{よって, } P(X=k) = \frac{2 \cdot {}_n P_k \cdot (n-k+1)!}{(n+2)!}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } (\text{分子}) &= 2 \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)! \\ &= 2 \cdot n! \cdot (n-k+1) \\ (\text{分母}) &= (n+2)(n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

$$\text{これらから, } P(X=k) = \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって、 $X$ の平均は、

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{2}{n+2} + \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \left\{ (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right\} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \left\{ (n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{n}{n+2} \left( n+1 - \frac{2n+1}{3} \right) = \frac{n}{3} \end{aligned}$$

また、 $X^2$ の平均は、

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{2}{n+2} + \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{2(n-k+1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \left\{ (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \right\} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \left\{ (n+1) \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{n+2} \left( \frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

よって、 $X$ の分散は、

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{6} - \left( \frac{n}{3} \right)^2 = \frac{n(n+3)}{18}$$

◀ ①より、

$$P(X=0) = \frac{2}{n+2}$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1) \right\rangle$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\left\langle V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \right\rangle$$

## B2-8 (104) 第2章 確率分布と統計的な推測

## B2.6

赤玉が3個、白玉が2個、青玉が1個入っている袋がある。この袋から3個の玉を同時に取り出すとき、取り出された玉の色が何種類であるかを確率変数  $X_0$  で表す。 $X_0$  から始まり、 $X_n = 3X_{n-1} + 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) によって定まる確率変数の列  $X_0, X_1, X_2, \dots$ ,  $X_n, \dots$  について、 $X_n$  の平均  $E(X_n)$  と分散  $V(X_n)$  を求めよ。

$X_n = 3X_{n-1} + 2$  は、 $X_n + 1 = 3(X_{n-1} + 1)$  と変形できる。

よって、 $X_n + 1 = 3^n(X_0 + 1)$

つまり、 $X_n = 3^n X_0 + 3^n - 1$

したがって、 $X_n$  の

平均は、 $E(X_n) = 3^n E(X_0) + 3^n - 1 \dots\dots ①$

分散は、 $V(X_n) = (3^n)^2 V(X_0) \dots\dots ②$

次に、確率変数  $X_0$  のとり得る値は1, 2, 3である。

$X_0 = 1$  (赤玉3個) となる確率は、 $\frac{1}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$

$X_0 = 2$  となるのは、

赤玉2個と、白玉または青玉1個

白玉2個と、赤玉または青玉1個

の場合であるから、その確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1 + {}_2C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{13}{20}$$

$X_0 = 3$  となるのは、赤玉、白玉、青玉が各1個の場合で、その確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_6C_3} = \frac{6}{20}$$

よって、 $E(X_0) = 1 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{13}{20} + 3 \times \frac{6}{20} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

また、 $E(X_0^2) = 1^2 \times \frac{1}{20} + 2^2 \times \frac{13}{20} + 3^2 \times \frac{6}{20} = \frac{107}{20}$

より、 $V(X_0) = E(X_0^2) - \{E(X_0)\}^2 = \frac{107}{20} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{23}{80}$

したがって、これら  $E(X_0)$ ,  $V(X_0)$  の値を①, ②に代入して、

$X_n$  の平均は、 $E(X_n) = 3^n \cdot \frac{9}{4} + 3^n - 1 = \frac{13}{4} \cdot 3^n - 1$

分散は、 $V(X_n) = (3^n)^2 \cdot \frac{23}{80} = \frac{23}{80} \cdot 3^{2n}$

◆特性方程式  $\alpha = 3\alpha + 2$

よって、 $\alpha = -1$

◆ $E(aX_0 + b) = aE(X_0) + b$

◆ $V(aX_0 + b) = a^2 V(X_0)$

◆6個から3個選ぶ場合の数は  ${}_6C_3$  通り

◆白玉と青玉の合わせて3個から1個選ぶ。

◆赤玉と青玉の合わせて4個から1個選ぶ。



●Step Up (p.B2-13)

1

0, 1, 2 のいずれかの値をとる確率変数  $X$  の期待値が 1, 分散が  $\frac{1}{2}$  であるとする. この確率変数  $X$  の確率分布を求めよ.

<考え方> 確率変数  $X$  が  $X=0, 1, 2$  となる確率を, それぞれ  $a, b, c$  とすると, 確率分布は右ようになる.  
確率の和が,  $a+b+c=1$  であることを利用する.

$X$	0	1	2	計
$P$	$a$	$b$	$c$	1

確率変数  $X$  のとり得る値は, 0, 1, 2 である.

$P(X=0)=a, P(X=1)=b, P(X=2)=c$  とすると,

確率の和は,  $a+b+c=1$  ……①

確率変数  $X$  の期待値は,

$E(X)=0 \times a + 1 \times b + 2 \times c = b + 2c = 1$  ……②

確率変数  $X$  の分散は,  $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$  であり,

$E(X^2)=0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times c = b + 4c$

よって,  $V(X)=\underline{(b+4c)-1^2}=\frac{1}{2}$

つまり,  $b+4c=\frac{3}{2}$  ……③

①, ②, ③を解くと,  $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$

したがって, 確率変数  $X$  の確率分布は右ようになる.

$X$	0	1	2	計
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

◀確率の総和はつねに 1

◀ $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

2

白玉 4 個と赤玉 2 個が入った箱がある. 1 個のさいころを投げて, 1 か 2 の目が出たら, この箱から玉を 4 個取り出し, 1, 2 以外の目が出たら, この箱から玉を 2 個取り出す. 取り出した玉のうちの白玉の個数を  $X$  とする. 確率変数  $X$  の平均  $E(X)$ , 標準偏差  $\sigma(X)$  を求めよ.

<考え方> たとえば,  $X=2$  となるのは,

- ・さいころの目が 1 か 2 で, 箱から 4 個の玉を取り出し, 白玉 2 個, 赤玉 2 個の場合または,
- ・さいころの目が 1, 2 以外で, 箱から 2 個の玉を取り出し, 2 個とも白玉の場合である.

$X$  のとり得る値は, 0, 1, 2, 3, 4 である.

$X=0$  となるのは, さいころの目が 1, 2 以外で, 箱から 2 個の玉を取り出し, 2 個とも赤玉の場合であり, その確率は,

$$\frac{4 \cdot {}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{45}$$

$X=1$  となるのは, さいころの目が 1, 2 以外で, 箱から 2 個の玉を取り出し, 白玉 1 個, 赤玉 1 個の場合であり, その確率は,

$$\frac{4 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 2}{15} = \frac{16}{45}$$

$X=2$  となるのは, さいころの目が 1 か 2 で, 箱から 4 個

◀さいころの目が 1, 2 のときは, 白玉を 2 個以上取り出す.

$$\text{◀} {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

2

## B2-10 (106) 第2章 確率分布と統計的な推測

の玉を取り出し、白玉2個、赤玉2個の場合、または、さいころの目が1, 2以外で、箱から2個の玉を取り出し、2個とも白玉の場合である。その確率は、

$$\frac{2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{6 \cdot {}_6C_4} + \frac{4 \cdot {}_4C_2}{6 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{15} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{15} = \frac{18}{45}$$

$X=3$  となるのは、さいころの目が1か2で、箱から4個の玉を取り出し、白玉3個、赤玉1個の場合であり、その確率は、

$$\frac{2 \cdot {}_4C_3 \cdot {}_2C_1}{6 \cdot {}_6C_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 2}{15} = \frac{8}{45}$$

$X=4$  となるのは、さいころの目が1か2で、箱から4個の玉を取り出し、4個とも白玉の場合であり、その確率は、

$$\frac{2 \cdot {}_4C_4}{6 \cdot {}_6C_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{45}$$

以上から、 $X$  の確率分布は次のようになる。

$X$	0	1	2	3	4	計
$P$	$\frac{2}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{18}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

よって、平均は、

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{2}{45} + 1 \times \frac{16}{45} + 2 \times \frac{18}{45} + 3 \times \frac{8}{45} + 4 \times \frac{1}{45} \\ &= \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

分散は、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$  であり、

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{2}{45} + 1^2 \times \frac{16}{45} + 2^2 \times \frac{18}{45} + 3^2 \times \frac{8}{45} + 4^2 \times \frac{1}{45} \\ &= \frac{176}{45} \end{aligned}$$

$$\text{であるから、} \quad V(X) = \frac{176}{45} - \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{304}{405}$$

したがって、標準偏差は、

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{304}{405}} = \frac{4\sqrt{95}}{45}$$

$$\text{以上より、} \quad E(X) = \frac{16}{9}, \quad \sigma(X) = \frac{4\sqrt{95}}{45}$$

$$\blacktriangleleft {}_6C_4 = {}_6C_2$$

$\blacktriangleleft$  さいころの目が1, 2以外のはきは、白玉を2個以下取り出す。

$$\blacktriangleleft V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$\blacktriangleleft \sqrt{\frac{304}{405}} = \frac{4\sqrt{19}}{9\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{95}}{45}$$

3

確率変数  $X$  は  $n$  個の値 1, 3, 5, ...,  $2n-1$  をとるものとする。  $X$  がそれぞれの値を等しい確率でとるとき、 $2X+3$  の平均と分散を求めよ。

<考え方> 確率変数  $X$  がそれぞれの値をとる確率は、すべて  $\frac{1}{n}$  であり、 $X$  の平均は、

$$E(X) = \sum_{k=1}^n \left\{ (2k-1) \cdot \frac{1}{n} \right\} \text{ である。1次式 } aX+b \text{ について、}$$

$$\text{平均 } E(aX+b) = aE(X)+b, \text{ 分散 } V(aX+b) = a^2V(X)$$

であることを利用する。

確率変数  $X$  はそれぞれの値を等しい確率でとるから、

$$P(X=2k-1) = \frac{1}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} X \text{ の平均は, } E(X) &= \sum_{k=1}^n \left\{ (2k-1) \cdot \frac{1}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n \right\} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \end{aligned}$$

よって,  $2X+3$  の平均は,

$$\begin{aligned} E(2X+3) &= 2E(X)+3 \\ &= 2n+3 \end{aligned}$$

$X$  の分散は,

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であり,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^n \left\{ (2k-1)^2 \cdot \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{n} \left( 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \right\} \\ &= \frac{4n^2-1}{3} \end{aligned}$$

この  $E(X^2)$  と  $E(X)$  を  $\textcircled{1}$  に代入すると,  $X$  の分散は,

$$V(X) = \frac{4n^2-1}{3} - n^2 = \frac{n^2-1}{3}$$

また,  $2X+3$  の分散は,  $V(2X+3) = 2^2 V(X)$  であるから,

$$V(2X+3) = 2^2 \cdot \frac{n^2-1}{3} = \frac{4(n^2-1)}{3}$$

以上より,  $2X+3$  の平均は  $2n+3$ , 分散は  $\frac{4(n^2-1)}{3}$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n} \\ = \sum_{k=1}^n \left\{ (2k-1) \cdot \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft aX+b(X \text{ の } 1 \text{ 次式}) \text{ の平均} \\ \text{は,} \\ E(aX+b) \\ = aE(X)+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft aX+b(X \text{ の } 1 \text{ 次式}) \text{ の分散} \\ \text{は,} \\ V(aX+b) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

4

袋の中に  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{5}$ ,  $\textcircled{7}$  のカードがそれぞれ 4 枚, 3 枚, 2 枚, 1 枚ずつ入っている. この袋から 1 枚取り出しては袋に戻す試行を 5 回繰り返し返し,  $k$  回目 ( $k=1, 2, \cdots, 5$ ) に出たカードの番号が  $X_k$  ならば  $kX_k$  が得点となる. 得点の合計の平均と分散を求めよ.

<考え方> 合計得点は,  $1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 + 5 \cdot X_5$  である.

$a, b$  が定数のとき, 和の平均は,  $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$  である.

さらに,  $X$  と  $Y$  が独立ならば, 和の分散は,  $V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$  である.

5 回の合計得点を  $S$  とすると,

$$S = 1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 + 5 \cdot X_5$$

よって, 合計得点の平均は,

$$\begin{aligned} E(S) &= E(1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 + 5 \cdot X_5) \\ &= 1 \cdot E(X_1) + 2 \cdot E(X_2) + 3 \cdot E(X_3) \\ &\quad + 4 \cdot E(X_4) + 5 \cdot E(X_5) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで, 確率変数  $X_k$  の確率分布は次のようになる.

$X_k$	1	3	5	7	計
$P$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\begin{aligned} \text{よって, } E(X_k) &= 1 \times \frac{4}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 7 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft a, b \text{ が定数のとき,} \\ E(aX+bY) \\ = aE(X)+bE(Y) \end{aligned}$$

## B2-12 (108) 第2章 確率分布と統計的な推測

この  $E(X_k)=3$  は,  $k=1, 2, \dots, 5$  で成り立つから,

①は,

$$\begin{aligned} E(S) &= 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 3 \\ &= (1+2+3+4+5) \times 3 = 15 \times 3 = 45 \end{aligned}$$

次に,  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  は互いに独立な確率変数であるから, 合計得点  $S$  の分散は,

$$\begin{aligned} V(S) &= V(1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 + 5 \cdot X_5) \\ &= 1^2 \cdot V(X_1) + 2^2 \cdot V(X_2) + 3^2 \cdot V(X_3) \\ &\quad + 4^2 \cdot V(X_4) + 5^2 \cdot V(X_5) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

また,  $X_k$  の分散は,  $V(X_k) = E(X_k^2) - \{E(X_k)\}^2$  であり,

$$E(X_k^2) = 1^2 \times \frac{4}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 5^2 \times \frac{2}{10} + 7^2 \times \frac{1}{10} = 13$$

これと  $E(X_k)=3$  から,  $X_k$  の分散は,

$$V(X_k) = 13 - 3^2 = 4$$

この  $V(X_k)=4$  は,  $k=1, 2, \dots, 5$  で成り立つから,

②は,

$$\begin{aligned} V(S) &= 1^2 \times 4 + 2^2 \times 4 + 3^2 \times 4 + 4^2 \times 4 + 5^2 \times 4 \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \times 4 = 55 \times 4 = 220 \end{aligned}$$

以上より, 平均 45, 分散 220

◀  $X$  と  $Y$  が独立ならば,  
 $V(aX+bY)$   
 $= a^2V(X) + b^2V(Y)$

5

赤玉 5 個と白玉 3 個が入っている袋から, 4 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉の個数を  $X$ , 白玉の個数を  $Y$  とする.

(1)  $Z=3X+Y$  とするとき,  $Z$  の平均  $E(Z)$ , 標準偏差  $\sigma(Z)$  を求めよ.

(2)  $T=XY$  とするとき,  $T$  の平均  $E(T)$  を求めよ.

<考え方> (1) まずは  $X$  の平均, 標準偏差を求め, (赤玉と白玉の個数の和)  $= X+Y=4$ , つまり,  $Y=4-X$  であることを利用する.

(2)  $X, Y$  は互いに独立ではないから,  $E(XY)=E(X)E(Y)$  は使えない.

$T=XY=X(4-X)=-X^2+4X$  より, 一般に成り立つ, 確率変数の和の平均

$E(aM+bN)=aE(M)+bE(N)$  を用いる.

(1) 確率変数  $X$  のとり得る値は,  $X=1, 2, 3, 4$  である.

$$P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{{}_8C_4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{{}_8C_4} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{{}_8C_4} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_5C_4}{{}_8C_4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

より, 平均は,

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{6}{14} + 3 \times \frac{6}{14} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{35}{14} = \frac{5}{2}$$

$$\text{また, } E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{14} + 2^2 \times \frac{6}{14} + 3^2 \times \frac{6}{14} + 4^2 \times \frac{1}{14}$$

$$= \frac{95}{14}$$

よって, 分散は,

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{95}{14} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{28}$$

◀ 4 個の玉を同時に取り出すとき, 白玉は全部で 3 個しかないのだから,  $X=0$  とはならない.  $X$  の確率分布は次のようになる.

$X$	1	2	3	4	計
$P$	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$	1

標準偏差は、 $\sigma(X) = \sqrt{\frac{15}{28}} = \frac{\sqrt{105}}{14}$   
 4個の玉を同時に取り出すので、赤玉と白玉の個数の和は、 $X + Y = 4$   
 よって、 $Y = 4 - X$  より、  
 $Z = 3X + Y = 3X + (4 - X) = 2X + 4$   
 したがって、 $Z$ の平均は、

$$E(Z) = E(2X + 4) = 2E(X) + 4 \\ = 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 = 9$$

$$\text{標準偏差は、} \sigma(Z) = \sigma(2X + 4) = 2\sigma(X) \\ = 2 \cdot \frac{\sqrt{105}}{14} = \frac{\sqrt{105}}{7}$$

(2)  $T = XY = X(4 - X) = -X^2 + 4X$  である。  
 よって、 $E(T) = E(-X^2 + 4X) = -E(X^2) + 4E(X)$

(1)より、 $E(X) = \frac{5}{2}$ 、 $E(X^2) = \frac{95}{14}$  であるから、

$T$ の平均は、

$$E(T) = -\frac{95}{14} + 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{45}{14}$$

◀  $a, b$  が定数で、  
 $Y = aX + b$  のとき、  
 $E(Y) = aE(X) + b$   
 $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

◀  $X, Y$  は互いに独立ではないから、 $E(XY) = E(X)E(Y)$  は使えない。

◀  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

6

確率変数  $X$  は二項分布  $B(n, p)$  に従い、その平均  $m$  は  $m = 2$  で、標準偏差  $\sigma$  は  $\sigma = \frac{\sqrt{6}}{2}$  である。

- (1)  $n$  と  $p$  の値を求めよ。
- (2)  $|X - m| > \sigma$  となる確率を求めよ。
- (3)  $X^2 + 2X - 3$  の平均  $E(X^2 + 2X - 3)$  を求めよ。

<考え方> (1) 確率変数  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき、平均は、 $E(X) = np$ 、標準偏差は、 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$  である。  
 (2) 余事象  $|X - m| \leq \sigma$  の確率をまず求める。  
 (3) 一般に、確率変数の和の平均  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$  であるから、  
 $E(X^2 + 2X - 3) = E(X^2) + 2E(X) - 3$  となる。

(1)  $X$ の平均は、

$$E(X) = np = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

標準偏差は、 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$  より、

$$np(1-p) = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①を②に代入して、 $2(1-p) = \frac{3}{2}$

$$1-p = \frac{3}{4}$$

よって、 $p = \frac{1}{4}$

①に、 $p$ の値を代入して解くと、 $n = 8$

(2)  $X$ が  $|X - 2| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$  を満たす確率を求めると、

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq X - 2 \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

◀  $m = 2, \sigma = \frac{\sqrt{6}}{2}$

## B2-14 (110) 第2章 確率分布と統計的な推測

より,  $2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq X \leq 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$  であり,  $1 < \frac{\sqrt{6}}{2} < 2$  である  
 から, 確率変数  $X$  のとり得る値は,

$$X=1, 2, 3$$

ここで,

$$\begin{aligned} P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = {}_8C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^7 + {}_8C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^6 + {}_8C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ = \frac{212 \cdot 3^5}{4^8} = \frac{53 \cdot 3^5}{4^7} \\ = \frac{12879}{16384} \end{aligned}$$

したがって,  $|X-2| > \frac{\sqrt{6}}{2}$  となる確率は,

$$1 - P\left(|X-2| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 1 - \frac{12879}{16384} = \frac{3505}{16384}$$

(3)  $E(X^2 + 2X - 3) = E(X^2) + 2E(X) - 3$  ……③ となる.

また,  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$  であるから,

$$E(X) = 2, \quad V(X) = \{\sigma(X)\}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \text{ を代入して,}$$

$$\frac{3}{2} = E(X^2) - 2^2$$

$$\text{よって, } E(X^2) = \frac{11}{2}$$

したがって, ③より,

$$E(X^2 + 2X - 3) = \frac{11}{2} + 2 \times 2 - 3 = \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} 2 &< \sqrt{6} < 3 \text{ より,} \\ 1 &< \frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{3}{2} < 2 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft n=8, \quad p=\frac{1}{4}, \quad 1-p=\frac{3}{4}$$

より,

$$P(X=k) = {}_8C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}$$

◀ 余事象の確率

◀ 確率変数の和の平均

$$E(aX + bY)$$

$$= aE(X) + bE(Y)$$

◀  $E(X) = m = 2$

7

袋の中に100個の玉が入っており, そのうち  $2a$  個が赤玉である. この袋から無作為に1個の玉を取り出し, 色を調べてからもとに戻す. この操作を  $n$  回繰り返すすると, 赤玉を取り出した回数  $X$  の平均は  $\frac{16}{5}$ , 分散は  $\frac{64}{25}$  であるという. このとき,  $a$  と  $n$  の値を求めよ.

<考え方> 1回の操作で赤玉が出る確率は  $\frac{2a}{100} = \frac{a}{50}$  であり, 玉をもとに戻して  $n$  回の操作を

繰り返すから, 確率変数  $X$  は二項分布  $B\left(n, \frac{a}{50}\right)$  に従う.

1回の操作で, 赤玉が出る確率は,  $\frac{2a}{100} = \frac{a}{50}$  であるから,

$n$  回の操作で赤玉が  $r$  回出る確率は,

$$P(X=r) = {}_nC_r \left(\frac{a}{50}\right)^r \left(1 - \frac{a}{50}\right)^{n-r}$$

よって, 確率変数  $X$  は二項分布  $B\left(n, \frac{a}{50}\right)$  に従う.

$X$  の平均は,  $E(X) = n \cdot \frac{a}{50} = \frac{16}{5}$  より,

$$na = 160 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$X$  の分散は,  $V(X) = n \cdot \frac{a}{50} \cdot \left(1 - \frac{a}{50}\right) = \frac{64}{25}$  より,

◀  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従

うとき,  $q = 1 - p$  とすると,

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

$$na(50-a)=6400 \quad \cdots \cdots ②$$

①を②に代入して,

$$160(50-a)=6400$$

よって,  $50-a=40$  より,

$$a=10$$

これは,  $0 < 2a < 100$  を満たす.

$a=10$  を①に代入して,

$$n=16$$

◀条件を満たしているかどうか調べる.

## ●Check! (p.B2-19)

7

確率変数  $X$  が区間  $0 \leq X \leq 4$  の任意の値をとり, その確率密度関数が  $f(x)=k(5-x)$  であるとき,  $k$  の値を求めよ. また,  $P(1 \leq X \leq 3)$  を求めよ.

$0 \leq x \leq 4$  において,  $5-x > 0$

であり,  $f(x)=k(5-x) \geq 0$

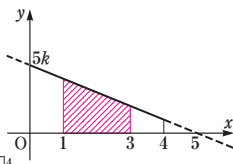
であるから,  $k \geq 0$

$$\text{また, } P(0 \leq X \leq 4) = \int_0^4 f(x) dx = 1$$

$$\text{より, } \int_0^4 k(5-x) dx = k \left[ 5x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = k(20-8) = 1$$

$$\text{よって, } k = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって, } P(1 \leq X \leq 3) &= \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^3 \frac{1}{12}(5-x) dx \\ &= \frac{1}{12} \left[ 5x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



◀  $y=f(x)$  のグラフ,  $x$  軸, 直線  $x=0$ ,  $x=4$  で囲まれた図形の面積は 1

◀  $f(1)=\frac{1}{3}$ ,  $f(3)=\frac{1}{6}$  より, 台形の面積公式を用いてもよい.

8

確率変数  $X$  の確率密度関数が  $f(x)=\frac{1}{2}x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) のとき, 確率変数  $X$  の平均, 分散, 標準偏差を求めよ.

確率変数  $X$  の平均は,

$$\begin{aligned} m=E(X) &= \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{6} x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分散は, } V(X) &= \int_0^2 x^2 f(x) dx - m^2 \\ &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} x dx - \left( \frac{4}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx - \frac{16}{9} \\ &= \left[ \frac{1}{8} x^4 \right]_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{標準偏差は, } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{◀ } E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\text{◀ } E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

## B2-16 (112) 第2章 確率分布と統計的な推測

9

確率変数  $X$  が正規分布  $N(24, 8^2)$  に従うとき,  $P(X \leq 16)$ , および  $P(8 \leq X \leq 32)$  を求めよ.  
ただし,  $P(|X - 24| \leq 8) = 0.6827$ ,  $P(|X - 24| \leq 16) = 0.9545$  として計算せよ.

平均は  $m = 24$ , 標準偏差は  $\sigma = 8$  であり, 与えられた条件から,

$$P(|X - m| \leq \sigma) = 0.6827$$

$$P(|X - m| \leq 2\sigma) = 0.9545$$

すなわち,

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = 0.6827$$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) =$$

$$0.9545$$

$$16 = 24 - 1 \times 8 = m - \sigma$$

となるから,

$$P(X \leq 16) = P(X \leq m - \sigma)$$

$$= P(X \leq m) - P(m - \sigma \leq X \leq m)$$

$$= 0.5 - \frac{0.6827}{2}$$

$$= 0.15865$$

$$8 = 24 - 2 \times 8 = m - 2\sigma$$

$$32 = 24 + 1 \times 8 = m + \sigma$$

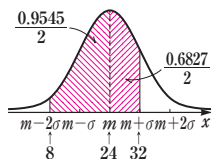
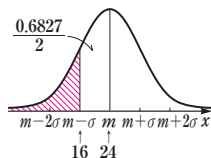
となるから,

$$P(8 \leq X \leq 32)$$

$$= P(m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma)$$

$$= P(m - 2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + \sigma)$$

$$= \frac{0.9545}{2} + \frac{0.6827}{2} = 0.8186$$



◀  $P(X \leq m) = 0.5$

◀ グラフは直線  $x = m$  に関して対称であることを利用する.

◀  $\alpha > 0, \beta > 0$  のとき,

$$P(m - \alpha \leq X \leq m + \beta)$$

$$= P(m - \alpha \leq X \leq m)$$

$$+ P(m \leq X \leq m + \beta)$$

10

正規分布  $N(18, 6^2)$  に従う確率変数  $X$  について, 次の等式が成り立つ. このとき, 正規分布表を用いて  $a, b$  の値を求めよ.

$$(1) P(X \leq a) = 0.9032$$

$$(2) P(12 \leq X \leq b) = 0.7745$$

平均は  $m = 18$ , 標準偏差は  $\sigma = 6$  である.

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 18}{6} \text{ とおくと, } Z \text{ は標準正規分布}$$

$N(0, 1)$  に従う.

$$(1) P(X \leq a) = 0.9032 > 0.5 \text{ より,}$$

$$m = 18 < a$$

よって,

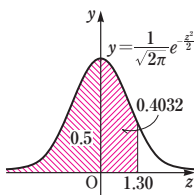
$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 18}{6}\right)$$

$$= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 18}{6}\right)$$

$$= 0.9032$$

$$\text{これより, } P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 18}{6}\right) = 0.4032$$

$$\text{したがって, 正規分布表から, } \frac{a - 18}{6} = 1.30$$



◀  $N(m, \sigma^2)$

◀  $P(X \leq 18) = 0.5$

◀  $P(0 \leq Z \leq 1.30)$

$$= 0.4032$$



これを解いて,

$$a = 1.30 \times 6 + 18 = 25.8$$

$$(2) \ b \leq 18 \text{ のとき, } P(12 \leq X \leq b) < 0.5$$

となり不適

よって,  $b > 18$  より,

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq b) &= P\left(\frac{12-18}{6} \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) \\ &= P\left(-1 \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) \\ &= 0.3413 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) = 0.7745 \end{aligned}$$

これより,

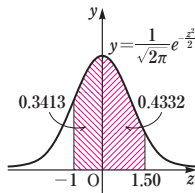
$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-18}{6}\right) = 0.4332$$

したがって, 正規分布表から,

$$\frac{b-18}{6} = 1.50$$

これを解いて,

$$b = 1.50 \times 6 + 18 = 27$$



$$\begin{aligned} &\leftarrow b > 18 \text{ より,} \\ &\frac{b-18}{6} > 0 \end{aligned}$$

◀ 正規分布表を利用

$$\begin{aligned} &\leftarrow P(0 \leq Z \leq 1.50) \\ &= 0.4332 \end{aligned}$$

11

ある学校で 500 人の生徒にテストを行ったところ, その得点  $X$  は平均 48 点, 標準偏差 16 点の正規分布に従った. 正規分布表を用いて次の問いに答えよ. ただし, 得点は整数とする.

(1) 76 点以上の生徒は約何人いるか.

(2) 得点が高い方から 50 人の中に入るには, 約何点以上であればよいか.

平均は  $m = 48$ , 標準偏差は  $\sigma = 16$  である.

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-48}{16} \text{ とおくと, } Z \text{ は標準正規分布}$$

$N(0, 1)$  に従う.

$$\begin{aligned} (1) \ P(X \geq 76) &= P\left(Z \geq \frac{76-48}{16}\right) \\ &= P(Z \geq 1.75) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.75) \\ &= 0.5 - 0.4599 \\ &= 0.0401 \end{aligned}$$

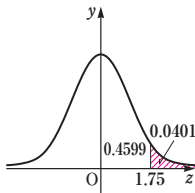
よって, 76 点以上の生徒の人数は,

$$500 \times 0.0401 = 20.05$$

したがって, 約 20 人

$$(2) \ \frac{50}{500} = 0.1 \text{ であるから, } P(Z \geq u) = 0.1 \text{ となる } u \text{ の値を}$$

求める.



$$\leftarrow N(48, 16^2)$$

◀ 76 点以上の生徒の割合は全体のおよそ 0.0401 である.

## B2-18 (114) 第2章 確率分布と統計的な推測

$$\begin{aligned}
 P(0 \leq Z \leq u) &= 0.5 - P(Z \geq u) \\
 &= 0.5 - 0.1 \\
 &= 0.4
 \end{aligned}$$

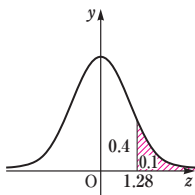
より、正規分布表から、 $u \doteq 1.28$

これに対する  $X$  の値は、

$$\frac{X-48}{16} = 1.28 \text{ より,}$$

$$X = 1.28 \times 16 + 48 = 68.48$$

したがって、約 69 点以上



$$P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.3997$$

$$P(0 \leq Z \leq 1.29) = 0.4015$$

◀  $X$  は  $X \geq 68.48$  を満たす整数

2

12

さいころを 720 回振るとき、1 の目が出る回数を  $X$  とする。  $X$  が 100 以上 130 以下の範囲にある確率  $P(100 \leq X \leq 130)$  を、正規分布表を用いて求めよ。

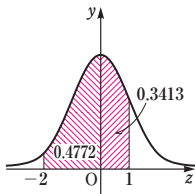
$X$  の分布は二項分布  $B(720, \frac{1}{6})$  であるから、

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X - 720 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{720 \times \frac{1}{6} \times (1 - \frac{1}{6})}} = \frac{X - 120}{10}$$

とおくと、 $Z$  の分布は、標準正規分布  $N(0, 1)$  とみなせる。  
よって、

$$\begin{aligned}
 &P(100 \leq X \leq 130) \\
 &= P\left(\frac{100-120}{10} \leq Z \leq \frac{130-120}{10}\right) \\
 &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\
 &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185
 \end{aligned}$$

したがって、回数  $X$  が  $100 \leq X \leq 130$  の範囲にある確率は、**0.8185**



◀ さいころを 1 回振って 1 が出る確率は  $\frac{1}{6}$

$$q = 1 - p$$

## ●練習

## B2.7

確率変数  $X$  が区間  $1 \leq X \leq 9$  の任意の値をとり、その確率密度関数が

$f(x) = k(x+3-2|x-3|)$  ( $k$  は正の定数) である.

(1)  $k$  の値を求めよ.

(2) 確率  $P(2 \leq X \leq 6)$  を求めよ.

(3) 平均  $m$  と標準偏差  $\sigma$  を求めよ.

$$(1) \quad x \leq 3 \text{ のとき, } f(x) = k\{x+3-2(-x+3)\} \\ = 3k(x-1)$$

$$x \geq 3 \text{ のとき, } f(x) = k\{x+3-2(x-3)\} = -k(x-9)$$

$k > 0$  より,  $y = f(x)$  の

グラフは右ようになる.

$X$  がとり得る値の範囲は

$1 \leq X \leq 9$  より,

$$P(1 \leq X \leq 9) \\ = \int_1^9 f(x) dx = 1 \quad \dots\dots ①$$

また, 右の図において,  $A(3, 6k)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(9, 0)$

とすると,  $\int_1^9 f(x) dx = \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (9-1) \cdot 6k = 24k$

となるから, ①より,  $24k = 1$

$$\text{よって, } k = \frac{1}{24}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-1) & (x \leq 3 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{24}(x-9) & (x \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

$$P(2 \leq X \leq 6) = \int_2^6 f(x) dx \\ = \int_2^3 \frac{1}{8}(x-1) dx + \int_3^6 \left\{ -\frac{1}{24}(x-9) \right\} dx \\ = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_2^3 - \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{2}x^2 - 9x \right]_3^6 \\ = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{2}(9-4) - (3-2) \right\} - \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{2}(36-9) - 9(6-3) \right\} \\ = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{27}{2} = \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad m = \int_1^9 x f(x) dx \\ = \int_1^3 \frac{1}{8}x(x-1) dx + \int_3^9 \left\{ -\frac{1}{24}x(x-9) \right\} dx \\ = \frac{1}{8} \int_1^3 (x^2 - x) dx - \frac{1}{24} \int_3^9 (x^2 - 9x) dx \\ = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 - \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right]_3^9 \\ = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3}(3^3-1) - \frac{1}{2}(3^2-1) \right\} \\ \quad - \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{3}(9^3-3^3) - \frac{9}{2}(9^2-3^2) \right\} \\ = \frac{1}{8} \cdot \frac{14}{3} + \frac{1}{24} \cdot 90 = \frac{13}{3}$$

◀ まずは絶対値記号をはずす.

◀  $1 \leq x \leq 3$  のとき, 右上がりの直線

$3 \leq x \leq 9$  のとき, 右下がりの直線となる.

◀  $\triangle ABC$  において,  $BC$  を底辺とみると, 高さは  $A$  の  $y$  座標

$$\begin{aligned} \text{◀ } P(a \leq X \leq b) \\ = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

## B2-20 (116) 第2章 確率分布と統計的な推測

分散は,

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \int_0^9 x^2 f(x) dx - m^2 \\
 &= \int_0^3 \frac{1}{8} x^2 (x-1) dx \\
 &\quad + \int_3^9 \left\{ -\frac{1}{24} x^2 (x-9) \right\} dx - m^2 \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^3 (x^3 - x^2) dx - \frac{1}{24} \int_3^9 (x^3 - 9x^2) dx - m^2 \\
 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 - \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{4} x^4 - 3x^3 \right]_3^9 - m^2 \\
 &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{4} (3^4 - 0) - \frac{1}{3} (3^3 - 0) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{4} (9^4 - 3^4) - 3(9^3 - 3^3) \right\} - \left( \frac{13}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{34}{3} + \frac{1}{24} \cdot 486 - \frac{169}{9} \\
 &= \frac{65}{3} - \frac{169}{9} = \frac{26}{9}
 \end{aligned}$$

したがって,  $\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{26}}{3}$ 

$$\begin{aligned}
 &\blacktriangleleft \int_1^9 (x-m)^2 f(x) dx \\
 &= \int_1^9 x^2 f(x) dx - m^2
 \end{aligned}$$

## B2.8

800 人の受験生が受けた英語、国語、数学の試験の得点は正規分布に従い、平均点は、それぞれ 54.8, 60.4, 48.3 で、標準偏差は、それぞれ 12.4, 11.2, 16.1 であった。A の得点が英語 72 点、国語 78 点、数学 68 点であるとき、どの教科の成績順位が最も高いといえるか。

英語の試験の得点を  $X_1$  とすると、 $X_1$  は正規分布  $N(54.8, 12.4^2)$  に従うから、 $Z_1 = \frac{X_1 - 54.8}{12.4}$  とおくと、 $Z_1$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。よって、

$$\begin{aligned}
 P(X_1 \geq 72) &= P\left(Z_1 \geq \frac{72 - 54.8}{12.4}\right) \\
 &= P(Z_1 \geq 1.39) = 0.5 - 0.4177 = 0.0823
 \end{aligned}$$

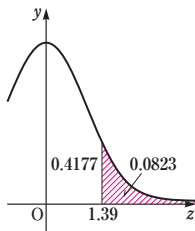
$800 \times 0.0823 = 65.84$  より、英語の得点の順位は、およそ 66 位と考えられる。

同様に、国語の試験の得点を  $X_2$  とすると、 $X_2$  は正規分布  $N(60.4, 11.2^2)$  に従うから、 $Z_2 = \frac{X_2 - 60.4}{11.2}$  とおくと、 $Z_2$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$$\begin{aligned}
 \text{よって、} \quad P(X_2 \geq 78) &= P\left(Z_2 \geq \frac{78 - 60.4}{11.2}\right) \\
 &= P(Z_2 \geq 1.57) \\
 &= 0.5 - 0.4418 = 0.0582
 \end{aligned}$$

$800 \times 0.0582 = 46.56$  より、国語の得点の順位は、およそ 47 位と考えられる。

また、数学の試験の得点を  $X_3$  とすると、 $X_3$  は正規分布  $N(48.3, 16.1^2)$  に従うから、 $Z_3 = \frac{X_3 - 48.3}{16.1}$  とおくと、 $Z_3$  は標準



$$\blacktriangleleft Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleleft \frac{72 - 54.8}{12.4} &= \frac{17.2}{12.4} \\
 &= 1.387 \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleleft P(Z_1 \geq 1.39) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z_1 \leq 1.39)
 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft \frac{78 - 60.4}{11.2} = \frac{17.6}{11.2} = 1.571 \dots$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleleft P(Z_2 \geq 1.57) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z_2 \leq 1.57)
 \end{aligned}$$

準正規分布  $N(0, 1)$  に従う.

$$\text{よって, } P(X_3 \geq 68) = P\left(Z_3 \geq \frac{68-48.3}{16.1}\right)$$

$$\begin{aligned} &\div P(Z_3 \geq 1.22) \\ &= 0.5 - 0.3888 = 0.1112 \end{aligned}$$

$800 \times 0.1112 = 88.96$  より, 数学の得点の順位は, およそ 89 位と考えられる.

したがって, 国語の成績順位が最も高いといえる.

$$\blacktriangleleft \frac{68-48.3}{16.1} = \frac{197}{161} = 1.223\cdots$$

$$\blacktriangleleft P(Z_3 \geq 1.22) = 0.5 - P(0 \leq Z_3 \leq 1.22)$$

$\blacktriangleleft$  順位で比較する.

## B2.9

ある入学試験で 300 人の募集定員 (合格者定数) に対して 1500 人が受験した. 試験は 500 点満点で, 受験生の得点は整数であり, 平均 232 点, 標準偏差 54 点の正規分布に従った.

(1) 合格最低点は約何点と考えられるか.

(2) 合格最低点とそれより 5 点低い得点の間には, 受験生が約何人いると考えられるか.

得点を  $X$  とすると,  $X$  は正規分布  $N(232, 54^2)$  に従うから,  
 $Z = \frac{X-232}{54}$  とおくと,  $Z$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う.

(1) 合格最低点を  $Y$  点とすると, 受験生に対する合格者の

割合は  $\frac{300}{1500} = 0.2$  であるから,

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{Y-232}{54}\right) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

$$\text{よって, } \frac{Y-232}{54} \div 0.84$$

$$\begin{aligned} Y &\div 232 + 54 \times 0.84 \\ &= 277.36 \end{aligned}$$

したがって, 合格最低点は  
 約 278 点

(2) 合格最低点より 5 点低い

273 点について調べると,

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{273-232}{54}\right)$$

$$\div P(0 \leq Z \leq 0.76) = 0.2764$$

であるから, 273 点以上の受験生の割合は, 受験生全体のおよそ,

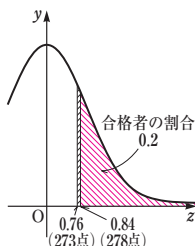
$$0.5 - 0.2764 = 0.2236$$

であり, 得点が 273 点の受験生の順位は,

$$1500 \times 0.2236 = 335.4$$

より, 上からおおよそ 335 位にあたる.

したがって,  $335 - 300 = 35$  より, 合格最低点とそれより 5 点低い得点の間には, 約 35 人いると考えられる.



$$\blacktriangleleft P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.2995$$

$$P(0 \leq Z \leq 0.85) = 0.3023$$

$$\blacktriangleleft P(0 \leq Z \leq 0.84)$$

$$- P(0 \leq Z \leq 0.76)$$

$$= 0.0231$$

より,

$$1500 \times 0.0231 = 34.65$$

としてもよい.

## B2.10

1 問あたりの正答率が 0.8 である問題を 400 問解答し, その正答数を  $X$  とする.  $X \leq \alpha$  の範囲にある確率が 0.4 以下となるような整数  $\alpha$  の最大値を求めよ.

1 問あたりの正答率が  $0.8 = \frac{4}{5}$ , 問題数 400 より, 正答数  $X$

は二項分布  $B\left(400, \frac{4}{5}\right)$  に従う.

## B2-22 (118) 第2章 確率分布と統計的な推測

$$\text{よって, } Z = \frac{X - 400 \times \frac{4}{5}}{\sqrt{400 \times \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right)}} = \frac{X - 320}{8} \text{ とおくと, } Z$$

の分布は標準正規分布  $N(0, 1)$  とみなせるから,

$$P(X \leq \alpha) = P\left(Z \leq \frac{\alpha - 320}{8}\right) \leq 0.4 = 0.5 - 0.1$$

$$\text{より, } P\left(0 \leq Z \leq -\frac{\alpha - 320}{8}\right) \geq 0.1$$

$$\text{したがって, } -\frac{\alpha - 320}{8} > 0.25$$

$$\alpha - 320 < -2$$

$$\alpha < 318$$

したがって,  $\alpha$  の最大値は, 317

$$\blacktriangleleft Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \\ (q = 1 - p)$$

$$\blacktriangleleft P(0 \leq Z \leq 0.25) = 0.0987 \\ P(0 \leq Z \leq 0.26) = 0.1026$$

2

## B2.11

3 個のさいころを 1 回投げたとき, 3 個の目の和が 15 以上になる事象を  $E$  とする.

(1) 事象  $E$  が起こる確率  $P(E)$  を求めよ.

(2) 3 個のさいころを 500 回投げるとき, 事象  $E$  が少なくとも 60 回起こる確率を求めよ.

(1) 3 個のさいころの目の出かたは  $6^3$  通り

このうち, 目の和が 15 になるのは, 出た目の組み合わせが,

$\{6, 6, 3\}$  のとき, 3 通り

$\{6, 5, 4\}$  のとき,  $3! = 6$  (通り)

$\{5, 5, 5\}$  のとき, 1 通り

であるから, 計 10 通り

和が 16 になるのは, 出た目の組み合わせが,

$\{6, 6, 4\}$  のとき, 3 通り

$\{6, 5, 5\}$  のとき, 3 通り

であるから, 計 6 通り

和が 17 になるのは, 出た目の組み合わせが

$\{6, 6, 5\}$  の 3 通り

和が 18 になるのは, 出た目の組み合わせが

$\{6, 6, 6\}$  の 1 通り

したがって, 求める確率は,

$$\frac{10 + 6 + 3 + 1}{6^3} = \frac{5}{54}$$

(2) 3 個のさいころを 500 回投げるとき, 事象  $E$  が起こる

回数を  $X$  とすると,  $X$  の分布は二項分布  $B\left(500, \frac{5}{54}\right)$  であり,

$$Z = \frac{X - 500 \times \frac{5}{54}}{\sqrt{500 \times \frac{5}{54} \times \frac{49}{54}}} = \frac{27X - 1250}{175}$$

とおくと,  $Z$  の分布は  $N(0, 1)$  とみなせる. よって,

$$P(X \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{27 \cdot 60 - 1250}{175}\right) = P(Z \geq 2.11) \\ = 0.5 - 0.4826 = 0.0174$$

したがって, 求める確率は, 0.0174

◀ 目の和の最大値は 18 より, 目の和のとり得る値は, 15, 16, 17, 18 となる.

$$\blacktriangleleft Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \\ (q = 1 - p) \\ \text{において,}$$

$$n = 500, \quad p = \frac{5}{54},$$

$$q = 1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}$$

## ●Step Up (p.B2-25)

8

確率変数  $X$  が区間  $1 \leq x \leq 4$  の任意の値をとり、その確率密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) & (1 \leq x \leq 2) \\ k(x-2) + \frac{1}{2} & (2 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad (k \text{ は定数})$$

であるとき、次のものを求めよ。

- (1) 確率  $P(1 \leq X \leq 2)$  (2)  $k$  の値  
(3) 平均  $m$  と分散  $V(X)$

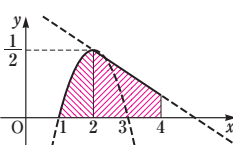
<考え方> (1) 確率  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$  である。

(2) 確率密度関数  $y=f(x)$  ( $\geq 0$ ) のグラフと  $x$  軸、直線  $x=1$ ,  $x=4$  で囲まれる部分の面積が 1 であることを利用する。

(3) 平均  $m = \int_1^4 xf(x) dx$ , 分散  $V(X) = \int_1^4 x^2 f(x) dx - m^2$  である。

- (1)  $1 \leq x \leq 2$  における確率密度関数は、

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) \geq 0 \text{ であるから、}$$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= \int_1^2 \left\{ -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}(2^3 - 1) - 2(2^2 - 1) + 3(2 - 1) \right\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$


- (2)  $f(x)$  は確率密度関数であるから、 $2 \leq x \leq 4$  においてつねに、

$$k(x-2) + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ である。}$$

また、(1)で  $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{3}$  より、

$$P(2 \leq X \leq 4) = 1 - P(1 \leq X \leq 2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} P(2 \leq X \leq 4) &= \int_2^4 \left\{ k(x-2) + \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \int_2^4 \left( kx - 2k + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{k}{2}x^2 - \left( 2k - \frac{1}{2} \right)x \right]_2^4 \\ &= \frac{k}{2}(4^2 - 2^2) - \left( 2k - \frac{1}{2} \right)(4 - 2) \\ &= 6k - 2\left( 2k - \frac{1}{2} \right) = 2k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{より、} 2k + 1 = \frac{2}{3}$$

$$k = -\frac{1}{6}$$

◀  $1 \leq x \leq 3$  のとき、

$$-\frac{1}{2}(x-1)(x-3) \geq 0$$

◀ つねに  $f(x) \geq 0$

◀  $y=f(x)$  のグラフと  $x$  軸、直線  $x=4$  で囲まれる部分の面積は 1

2

**B2-24** (120) 第2章 確率分布と統計的な推測

このとき,  $2 \leq x \leq 4$  において,

$$f(x) = -\frac{1}{6}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6} \geq \frac{1}{6}$$

となり, ①が成り立つ.

したがって,  $k = -\frac{1}{6}$

(3)  $1 \leq x \leq 2$  のとき,

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

$$2 \leq x \leq 4 \text{ のとき, } f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$$

よって,

$$\begin{aligned} m &= \int_1^4 xf(x)dx \\ &= \int_1^2 x \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_2^4 x \left( -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6} \right) dx \\ &= \int_1^2 \left( -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx + \int_2^4 \left( -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \right]_1^2 + \left[ -\frac{1}{18}x^3 + \frac{5}{12}x^2 \right]_2^4 \\ &= \left\{ -\frac{1}{8}(2^4-1) + \frac{2}{3}(2^3-1) - \frac{3}{4}(2^2-1) \right\} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{18}(4^3-2^3) + \frac{5}{12}(4^2-2^2) \right\} \\ &= \left( -\frac{15}{8} + \frac{14}{3} - \frac{9}{4} \right) + \left( -\frac{28}{9} + 5 \right) = \frac{175}{72} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_1^4 x^2 f(x) dx - m^2 \\ &= \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &\quad + \int_2^4 x^2 \left( -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6} \right) dx - m^2 \\ &= \int_1^2 \left( -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &\quad + \int_2^4 \left( -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 \right) dx - m^2 \\ &= \left[ -\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right]_1^2 \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{24}x^4 + \frac{5}{18}x^3 \right]_2^4 - m^2 \\ &= \left\{ -\frac{1}{10}(2^5-1) + \frac{1}{2}(2^4-1) - \frac{1}{2}(2^3-1) \right\} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{24}(4^4-2^4) + \frac{5}{18}(4^3-2^3) \right\} - m^2 \\ &= \left( -\frac{31}{10} + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} \right) + \left( -10 + \frac{140}{9} \right) - m^2 \\ &= \frac{9}{10} + \frac{50}{9} - m^2 \\ &= \frac{581}{90} - \left( \frac{175}{72} \right)^2 = \frac{14203}{25920} \end{aligned}$$

◀ つねに  $f(x) \geq 0$  となることを確認しておく.

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(4) \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{5}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

◀ 積分区間を分けて考える.

◀ 積分区間を分けて考える.

◀  $m = \frac{175}{72}$  を代入する.



9

箱の中に1から $n$  ( $n \geq 2$ ) までの数字が1つずつ書かれた $n$ 個の玉が入っている。この中から2個の玉を同時に取り出し、書かれている数の和だけポイントを受け取るゲームを行う。  
(1) 受け取るポイント数 $X$ の平均 $m$ と標準偏差 $\sigma$ を求めよ。  
(2)  $n=123$  のとき、 $X \geq 155$  となる確率を求めよ。ただし、 $X$  は正規分布に従うものとし、 $\sqrt{186} = 13.64$  とする。

<考え方> 取り出した2個の玉に書かれた数 $a, b$  ( $1 \leq a < b \leq n$ ) の和 $a+b$ の根元事象は全部

で ${}_nC_2$ 個あり、いずれも同等の確率 $\frac{1}{{}_nC_2} = \frac{2}{n(n-1)}$ で現れる。

玉に書かれている数字の和は、まず、

$$\begin{aligned} T_a &= (a+a+1) + (a+a+2) + \cdots + (a+n) \\ &= (2a+1) + (2a+2) + \cdots + (2a+n-a) \end{aligned}$$

を求め、その後、 $S = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} = \sum_{a=1}^{n-1} T_a$  を計算する。

平均は、 $m = S \cdot \frac{1}{{}_nC_2}$  である。

(1) 取り出した2個の玉に書かれた数を $a, b$  ( $1 \leq a < b \leq n$ ) とすると、 $a$  と  $b$  の和 $a+b$ の根元事象は全部で ${}_nC_2$ 個あり、いずれも同等の確率

$$\frac{1}{{}_nC_2} = \frac{2}{n(n-1)}$$

で現れる。  
よって、 $X$ の平均 $m$ は、 $(a+b) \cdot \frac{2}{n(n-1)}$ の総和である。

$a+b$ の総和を $S$ とすると、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} \{a+(a+k)\} \right\} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} (k+2a) \right\} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2}(n-a)(n-a+1) + 2a(n-a) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n-1} \{-3a^2 + (2n-1)a + n(n+1)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + (2n-1) \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \right. \\ &\quad \left. + n(n+1)(n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(n-1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} m &= S \cdot \frac{2}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(n-1) \cdot \frac{2}{n(n-1)} \\ &= n+1 \end{aligned}$$

$X$ の分散は、

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} (k+2a)^2 \cdot \frac{1}{{}_nC_2} \right\} - m^2 \\ &= \frac{1}{{}_nC_2} \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} (k+2a)^2 \right\} - m^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

◀  $n$  個の玉から2個選び、書かれている数の小さい方を $a$ とする。

◀  $\sum_{k=1}^n c = nc$  ( $c$  は定数)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

## B2-26 (122) 第2章 確率分布と統計的な推測

ここで,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} (k+2a)^2 \right\} = \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-a} (k^2 + 4ak + 4a^2) \right\} \\
 &= \sum_{a=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{6} (n-a)(n-a+1)(2n-2a+1) \right. \\
 &\quad \left. + 4a \cdot \frac{1}{2} (n-a)(n-a+1) + 4a^2 \cdot (n-a) \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{a=1}^{n-1} \{ -14a^3 + (6n-9)a^2 + (6n^2+6n-1)a \\
 &\quad + (2n^3+3n^2+n) \} \\
 &= \frac{1}{6} \left\{ -14 \cdot \left[ \frac{1}{2} (n-1)n \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + (6n-9) \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \right. \\
 &\quad \left. + (6n^2+6n-1) \cdot \frac{1}{2} (n-1)n \right. \\
 &\quad \left. + (2n^3+3n^2+n)(n-1) \right\} \\
 &= \frac{1}{12} (n-1)n(7n^2+11n+4)
 \end{aligned}$$

これを, ①に代入して,

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \frac{1}{nC_2} \cdot \frac{1}{12} (n-1)n(7n^2+11n+4) - m^2 \\
 &= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{12} (n-1)n(7n^2+11n+4) \\
 &\quad - (n+1)^2 \\
 &= \frac{1}{6} (n^2 - n - 2)
 \end{aligned}$$

したがって, 標準偏差は,

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{n^2 - n - 2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6(n^2 - n - 2)}}{6}$$

以上より,  $m=n+1$ ,  $\sigma = \frac{\sqrt{6(n^2 - n - 2)}}{6}$

(2)  $n=123$  より,

$$\begin{aligned}
 m &= n+1 = 124 \\
 \sigma &= \frac{\sqrt{n^2 - n - 2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(n+1)(n-2)}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{124 \cdot 121}}{\sqrt{6}} \\
 &= \frac{22\sqrt{31}}{\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{186}}{3}
 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{X-124}{\frac{11\sqrt{186}}{3}} = \frac{3X-372}{11\sqrt{186}} \quad \text{とおくと, } Z \text{ は標準正規分}$$

布  $N(0, 1)$  に従う.

よって, 求める確率は,

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 155) &= P\left(Z \geq \frac{3 \times 155 - 372}{11\sqrt{186}}\right) \\
 &= P\left(Z \geq \frac{93\sqrt{186}}{11 \times 186}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{186}}{22}\right) \\
 &= P(Z \geq 0.62) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.62) \\
 &= 0.5 - 0.2324 = 0.2676
 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleleft \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

◀(1)の結果を利用する.

10

正規分布  $N(16, 10^2)$  に従う 確率変数  $X$  について、次の等式が成り立つように、正の定数  $a$  の値をそれぞれ定めよ。

- (1)  $P(X \geq a) = 0.8888$
- (2)  $P(12 \leq X \leq a) = 0.6342$
- (3)  $P(|X - 16| \geq a) = 0.4354$
- (4) 確率変数  $Y$  が正規分布  $N(0, 5^2)$  に従うとき、 $P(0 \leq Y \leq 6) = P(a \leq X \leq 18)$

<考え方> 確率変数  $X$  が正規分布  $N(m, \sigma^2)$  に従うとき、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

- (1)  $P(X \geq a) = 0.8888 > 0.5$  より、 $a < m$  であるから、  
 $P(X \geq a) = P(a \leq X \leq m) + P(X \geq m)$  として考える。
- (2)  $P(12 \leq X \leq a) = 0.6342 > 0.5$  より、  
 $P(12 \leq X \leq a) = P(12 \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq a)$  として考える。
- (3) 集合  $\{X \mid |X - 16| \geq a\}$  の補集合は  $\{X \mid |X - 16| < a\}$  であるから、  
 $P(|X - 16| \geq a) = 1 - P(|X - 16| < a) = 0.4354$  と考えるとよい。
- (4) まずは  $P(0 \leq Y \leq 6)$  と  $P(m \leq X \leq 18)$  の大小関係から、 $a$  と  $m$  の大小関係を調べる。

$Z_1 = \frac{X-16}{10}$  とおくと、 $Z_1$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

- (1)  $P(X \geq a) = 0.8888 > 0.5$  より、 $a < 16$

すなわち、 $a - 16 < 0$

$$\begin{aligned} \text{よって、} P(X \geq a) &= P\left(Z_1 \geq \frac{a-16}{10}\right) \\ &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{16-a}{10}\right) + 0.5 = 0.8888 \end{aligned}$$

$$P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{16-a}{10}\right) = 0.3888$$

したがって、正規分布表から、

$$\frac{16-a}{10} = 1.22$$

$$a = 16 - 12.2 = 3.8$$

- (2)  $P(12 \leq X \leq a)$

$$= P\left(\frac{12-16}{10} \leq Z_1 \leq \frac{a-16}{10}\right)$$

$$= P\left(-0.4 \leq Z_1 \leq \frac{a-16}{10}\right)$$

$$= P(0 \leq Z_1 \leq 0.4) + P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{a-16}{10}\right) = 0.6342$$

正規分布表から、 $P(0 \leq Z_1 \leq 0.4) = 0.1554$  より、

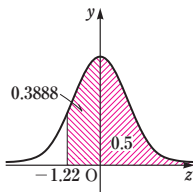
$$P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{a-16}{10}\right)$$

$$= 0.6342 - 0.1554 = 0.4788$$

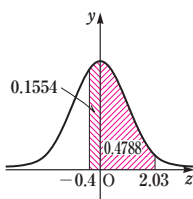
したがって、正規分布表から、

$$\frac{a-16}{10} = 2.03$$

$$a = 16 + 20.3 = 36.3$$



◀  $0 < a < 16$  を満たす。



◀  $P(12 \leq X \leq a) > 0.5$  より、 $a > m = 16$

◀  $a > 16$  を満たす。

**B2-28** (124) 第2章 確率分布と統計的な推測

- (3) 集合  $\{X||X-16|\geq a\}$  の補集合は,  $\{X||X-16|<a\}$  であるから,

$$P(|X-16|\geq a)=1-P(|X-16|<a)=0.4354$$

$$\text{よって, } P(|X-16|<a)=0.5646$$

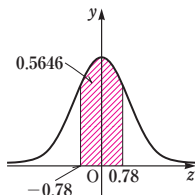
$$\text{ここで, } Z_1=\frac{X-16}{10} \text{ より,}$$

$$P(10|Z_1|<a)=P(|Z_1|<\frac{a}{10})=0.5646$$

となる.

よって,

$$\begin{aligned} &P(|Z_1|<\frac{a}{10}) \\ &=P(-\frac{a}{10}<Z_1<\frac{a}{10}) \\ &=2P(0\leq Z_1<\frac{a}{10}) \\ &=0.5646 \end{aligned}$$



$$\text{より, } P(0\leq Z_1\leq\frac{a}{10})=0.2823$$

$$\text{したがって, 正規分布表から, } \frac{a}{10}=0.78$$

$$a=7.8$$

- (4)  $Z_2=\frac{Y-0}{5}$  とおくと,  $Z_2$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従い,

$$\begin{aligned} P(0\leq Y\leq 6) &=P(0\leq Z_2\leq \frac{6}{5}) \\ &=P(0\leq Z_2\leq 1.2) \\ &=0.3849 \end{aligned}$$

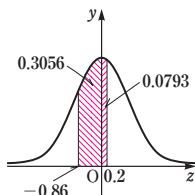
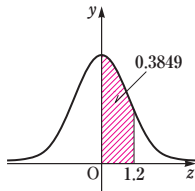
ここで,

$$\begin{aligned} &P(16\leq X\leq 18) \\ &=P(0\leq Z_1\leq \frac{18-16}{10}) \\ &=P(0\leq Z_1\leq 0.2)=0.0793 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } a<16$$

よって,

$$\begin{aligned} &P(a\leq X\leq 16) \\ &=P(\frac{a-16}{10}\leq Z_1\leq 0) \\ &=P(0\leq Z_1\leq \frac{16-a}{10}) \\ &=P(0\leq Y\leq 6) \\ &\quad - P(16\leq X\leq 18) \\ &=0.3849-0.0793 \\ &=0.3056 \end{aligned}$$



$$\text{正規分布表より, } \frac{16-a}{10}=0.86 \text{ とすると,}$$

$$a=16-8.6=7.4$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft a>0 \text{ のとき,} \\ &P(-a<Z_1<a) \\ &=P(-a<Z_1\leq 0) \\ &\quad + P(0\leq Z_1<a) \\ &=2P(0\leq Z_1<a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft a\geq 16 \text{ のとき,} \\ &P(a\leq X\leq 18)\leq 0.0793 \\ &\text{となり,} \\ &P(0\leq Y\leq 6)=P(a\leq X\leq 18) \\ &\text{とならない.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft P(0\leq Y\leq 6) \\ &=P(a\leq X\leq 16) \\ &\quad + P(16\leq X\leq 18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft P(0\leq Z_1\leq 0.86) &=0.3051 \\ P(0\leq Z_1\leq 0.87) &=0.3078 \end{aligned}$$

11

当たる確率の方が、はずれる確率よりも高くじ引きに、800名が参加したところ、当たる人数  $X$  の標準偏差は  $\frac{40}{3}$  であった。このとき、くじに当たる人が550人以上である確率を求めよ。

＜考え方＞ 当たる確率を  $p$  とすると、はずれる確率は  $1-p$  で、人数  $X$  が二項分布に従うから、標準偏差は  $\sqrt{800p(1-p)}$  である。

当たる確率を  $p(0 \leq p \leq 1)$  とすると、はずれる確率は  $1-p$  で、条件より、(当たる確率) > (はずれる確率) であるから、

$$p > 1-p \quad \text{つまり,} \quad \frac{1}{2} < p \leq 1$$

また、くじに当たる人数  $X$  は二項分布  $B(800, p)$  に従い、標準偏差は  $\frac{40}{3}$  であるから、

$$\sqrt{800p(1-p)} = \frac{40}{3}$$

平方して整理すると、 $9p^2 - 9p + 2 = 0$

$$(3p-2)(3p-1) = 0$$

より、 $p = \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} < p \leq 1$  であるから、 $p = \frac{2}{3}$

よって、

$$Z = \frac{X-800p}{\frac{40}{3}} = \frac{X-800 \times \frac{2}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{3X-1600}{40}$$

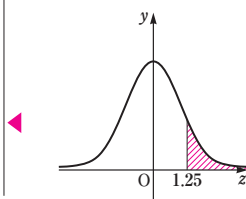
とおくと、 $Z$  の分布は  $N(0, 1)$  とみなせる。

したがって、くじに当たる人が550人以上である確率は、

$$\begin{aligned} P(X \geq 550) &= P\left(Z \geq \frac{3 \cdot 550 - 1600}{40}\right) = P(Z \geq 1.25) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.25) \\ &= 0.5 - 0.3944 \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$

◀ 二項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $X$  について、標準偏差は、 $\sqrt{np(1-p)}$

◀  $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$  とおく。



12

袋の中に赤玉3個と白玉3個が入っている。この袋から同時に2個の玉を取り出す試行を900回行うとき、取り出した2個がともに赤玉である回数を  $X$  とする。確率  $P(X \geq k) \geq 0.75$  を満たす最大の整数  $k$  の値を求めよ。

＜考え方＞  $P(X \geq k) \geq 0.75$  であり、平均を  $m$  とすると、 $P(X \geq m) = 0.5$  である。

よって、 $k \leq m$  であり、 $P(k \leq X \leq m) \geq 0.75 - 0.5 = 0.25$

6個の玉から同時に2個を取り出すとき、それがともに赤玉である確率は、 $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$

2

**B2-30** (126) 第2章 確率分布と統計的な推測

取り出した2個がともに赤玉である回数  $X$  は、二項分布

$B\left(900, \frac{1}{5}\right)$  に従うから、

$$Z = \frac{X - 900 \times \frac{1}{5}}{\sqrt{900 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)}} = \frac{X - 180}{12}$$

とおくと、 $Z$  の分布は、 $N(0, 1)$  とみなせる.

ここで、

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k - 180}{12}\right) \geq 0.75 = 0.25 + 0.5$$

より、 $\frac{k - 180}{12} < 0$

よって、

$$P\left(\frac{k - 180}{12} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{180 - k}{12}\right) \geq 0.25$$

であり、 $\frac{180 - k}{12} > 0.67$

よって、 $k < 180 - 12 \times 0.67 = 171.96$

したがって、整数  $k$  の最大値は 171

◀  $\frac{k - 180}{12} > 0$  のとき、

$$P\left(Z \geq \frac{k - 180}{12}\right) < 0.5$$

◀ 正規分布表より、

$$P(0 \leq Z \leq 0.67) = 0.2486$$

$$P(0 \leq Z \leq 0.68) = 0.2517$$

## ●Check! (p.B2-31)

13

ある高校の2年生女子の身長は、平均が158.2 cm、標準偏差が6.5 cmの正規分布に従う。この中から9人を無作為抽出したとき、身長が平均が163 cm以上となる確率を求めよ。

母集団の身長  $X$  は、 $m=158.2$ 、 $\sigma=6.5$  の正規分布に従うから、大きさ9の標本の標本平均  $\bar{X}$  の平均は、

$$E(\bar{X})=158.2, \text{ 標準偏差は, } \sigma(\bar{X})=\frac{6.5}{\sqrt{9}}=\frac{6.5}{3} \text{ となる.}$$

$$\text{よって, } Z=\frac{\bar{X}-158.2}{\frac{6.5}{3}}=\frac{3\bar{X}-474.6}{6.5} \text{ とおくと, } Z \text{ は標準}$$

正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 163) &= P\left(Z \geq \frac{3 \times 163 - 474.6}{6.5}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{14.4}{6.5}\right) \div P(Z \geq 2.22) \end{aligned}$$

より、求める確率は、

$$P(Z \geq 2.22) = 0.5 - 0.4868 = 0.0132$$

◀母平均  $m$ 、母標準偏差  $\sigma$  の母集団から、大きさ  $n$  の標本を無作為に抽出するとき、

$$E(\bar{X})=m$$

$$\sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

◀ $X$  が正規分布に従うから、 $\bar{X}$  も正規分布

$$N\left(158.2, \frac{6.5^2}{9}\right) \text{ に従う.}$$

14

ある都市の商店街の客から無作為に100人を抽出して調べたところ、64人がその都市の住人であった。このとき、客全体の何%がその都市の住人であるかを、信頼度99%で推定せよ。

標本比率が  $p_0 = \frac{64}{100} = 0.64$  より、標本の標準偏差  $s$  は、

$$s = \sqrt{0.64(1-0.64)} = 0.48$$

また、標本の大きさが  $n=100$  より、母比率  $p$  に対する信頼度99%の信頼区間は、

$$\left[0.64 - 2.58 \times \frac{0.48}{\sqrt{100}}, 0.64 + 2.58 \times \frac{0.48}{\sqrt{100}}\right]$$

すなわち、 $[0.516, 0.764]$

したがって、51.6%以上76.4%以下

◀標本比率  $p_0$  の標本の標準偏差は

$$s = \sqrt{p_0(1-p_0)}$$

◀標本の大きさ  $n$  が大きいとき、標本比率を  $p_0$  とすると、母比率に対する信頼度99%の信頼区間は、

$$\left[p_0 - 2.58 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, p_0 + 2.58 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right]$$

15

ある菓子には内容量150gと記載されている。このことを仮説検定を用いて検討するとき、帰無仮説を述べよ。

内容量は150gである

◀標本平均や標本比率の棄却域を求めることができるように帰無仮説を設定する。

**B2-32** (128) 第2章 確率分布と統計的な推測

16

次の文章は、食品 X を製造しているある工場について述べたものである。次の(ア)～(ウ)のうち、仮説検定を用いて確かめることができないものをすべて選べ。

(ア) ある工場が1日あたりに製造する食品 X の個数の平均値は 300 個である。

(イ) ある工場で製造される食品 X は国内で1番価格が高い。

(ウ) ある工場の1日に製造される食品 X の総数の 99% は製品規格を満たす。

(ア)は、帰無仮説  $H_0$  を「平均値は 300 個である」、対立仮説  $H_1$  を「平均値は 300 個でない」として、(ウ)は、帰無仮説  $H_0$  を「総数の 99% は製品規格を満たす」、対立仮説  $H_1$  を「製品規格を満たすものは総数の 99% ではない」として、仮説検定を用いて確かめることができる。

仮説検定を用いて確かめることができないものは、

(イ)



## ● 練習

B2.12

右のような確率分布の母集団から、大きさ 100 の標本を無作為に抽出する。その標本平均  $\bar{X}$  の平均  $E(\bar{X})$  と標準偏差  $\sigma(\bar{X})$  を求めよ。

$X$	1	2	3	4	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

母集団の平均は、

$$m = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

母集団の分散は、

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6}\right) - m^2 \\ &= \frac{43}{6} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

よって、母集団の標準偏差は、

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$$

したがって、標本平均  $\bar{X}$  の平均は、

$$E(\bar{X}) = m = \frac{5}{2}$$

標本平均  $\bar{X}$  の標準偏差は、

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\frac{\sqrt{33}}{6}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{33}}{60}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= E(X^2) - m^2 \end{aligned}$$

2

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

B2.13

大勢の生徒が受験した、ある試験の得点  $X$  は正規分布  $N(240, 28^2)$  に従っている。この母集団から  $n$  人を無作為に抽出するとき、 $n$  人の得点の平均  $\bar{X}$  が  $230 \leq \bar{X} \leq 250$  となる確率が 0.95 以上となる  $n$  の最小値を求めよ。

母集団の得点  $X$  は、平均  $m=240$ 、標準偏差  $\sigma=28$  の正規分布に従うから、 $Z = \frac{\bar{X}-240}{\frac{28}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X}-240)\sqrt{n}}{28}$  とおくと、

$Z$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。

$230 \leq \bar{X} \leq 250$  より、

$$\frac{230-240}{28}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{250-240}{28}\sqrt{n}$$

すなわち、 $-\frac{5}{14}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}$

よって、 $230 \leq \bar{X} \leq 250$  となる確率は、

$$P\left(-\frac{5}{14}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}\right)$$

$230 \leq \bar{X} \leq 250$  となる確率が 0.95 以上であるから、

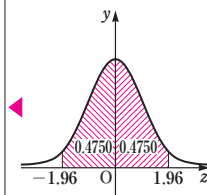
$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}\right) \geq 0.95$$

よって、 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}\right) \geq 0.475$

正規分布表より、 $\frac{5}{14}\sqrt{n} \geq 1.96$

$$Z = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{5}{14}\sqrt{n} \leq Z \leq 0\right) \\ = P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{14}\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$



B1

B2

C1

C2

**B2-34** (130) 第2章 確率分布と統計的な推測

$$\sqrt{n} \geq 5.488$$

両辺とも正より、平方して、 $n \geq 30.11 \cdots$

$n$  は整数だから、最小値は、**31**

**B2.14**

ある高校で 50 人の生徒を無作為に抽出し、5 月の読書冊数を調べたところ、下の表のようになった。この高校における、1 人当たりの 5 月の読書冊数の平均を、信頼度 99% で推定せよ。ただし、 $\sqrt{330} = 18.2$  として計算せよ。

読書冊数	0	1	2	3	4	5	計
人数	8	18	12	7	3	2	50

右の表は、読書冊数  $x$  ごとに、度数  $f$  と  $xf$ 、 $x^2f$  の値を記し、その縦の合計をまとめたものである。

この表から、標本平均は、

$$\bar{x} = \frac{85}{50} = \frac{17}{10} = 1.7$$

標本の標準偏差は、

$$s = \sqrt{\frac{227}{50} - \left(\frac{17}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{165}}{10}$$

よって、標本の大きさ 50、標本平均 1.7、標本の標準偏差  $\frac{\sqrt{165}}{10}$

より、1 人当たりの 5 月の読書冊数に対する信頼度 99% の信頼区間は、

$$\left[ 1.7 - 2.58 \times \frac{\sqrt{165}}{10} \times \frac{1}{\sqrt{50}}, 1.7 + 2.58 \times \frac{\sqrt{165}}{10} \times \frac{1}{\sqrt{50}} \right]$$

つまり、**[1.23, 2.17]**

$x$	$f$	$xf$	$x^2f$
0	8	0	0
1	18	18	18
2	12	24	48
3	7	21	63
4	3	12	48
5	2	10	50
計	50	85	227

$$s = \sqrt{E(x^2) - \{E(x)\}^2}$$

◀ 標本の大きさ  $n$  が大きいとき、標本平均の値を  $\bar{x}$ 、標本の標準偏差の値を  $s$  とすると、母平均に対する信頼度 99% の信頼区間は、

$$\left[ \bar{x} - 2.58 \times \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.58 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

**B2.15**

ある高校の 3 年生の生徒から 150 人を無作為抽出して調べたところ、理系の生徒は 96 人であった。この高校の 3 年生全体における理系の生徒の割合を信頼度 99% で推定せよ。ただし、 $\sqrt{6} = 2.45$  として計算せよ。

標本比率は  $p_0 = \frac{96}{150} = 0.64$  より、標本の標準偏差は、

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{p_0(1-p_0)} \\ &= \sqrt{0.64 \times 0.36} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

よって、標本の大きさが 150 より、母比率に対する信頼度 99% の信頼区間は、

## 第2章 確率分布と統計的な推測 (131)

## B2-35

$$\left[ 0.64 - 2.58 \times \frac{0.48}{\sqrt{150}}, 0.64 + 2.58 \times \frac{0.48}{\sqrt{150}} \right]$$

すなわち,

$$\left[ 0.64 - 2.58 \times 0.48 \times \frac{\sqrt{6}}{30}, 0.64 + 2.58 \times 0.48 \times \frac{\sqrt{6}}{30} \right]$$

より,  $[0.539, 0.741]$ 

◀ 標本の大きさ  $n$  が大きいとき、標本比率を  $p_0$  とすると、母比率に対する信頼度 99% の信頼区間は、

$$\left[ p_0 - 2.58 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, p_0 + 2.58 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right]$$

$$\leftarrow \frac{1}{\sqrt{150}} = \frac{1}{5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{30}$$

## B2.16

ある店で売られているチョコレートは 1 個の重さが 10g であるという。このチョコレートを手 196 個購入し、重さを調べたところ、標本平均は 10.05g、標準偏差は 0.04g であった。この店のチョコレート 1 個の重さの平均は 10g といえるか、有意水準 5% で仮説検定せよ。

帰無仮説  $H_0$ : 平均は 10g である対立仮説  $H_1$ : 平均は 10g でない

とする。

標本平均を  $\bar{X}$  とすると、 $\bar{X}$  の棄却域は、

$$|\bar{X} - m| > 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $s=0.04$ ,  $n=196$  であり、帰無仮説より、 $m=10$  である。

これらを①に代入すると、棄却域は、

$$|\bar{X} - 10| > 1.96 \times \frac{0.04}{\sqrt{196}} = 0.0056$$

を満たす範囲である。

ここで、 $\bar{X}=10.05$  とすると、

$$|10.05 - 10| = 0.05 > 0.0056$$

となり、帰無仮説は棄却される。

よって、チョコレートの重さの平均は 10g でないといえる。

## B2-36 (132) 第2章 確率分布と統計的な推測

## ●Step Up (p.B2-42)

13

さいころを  $n$  回投げて、出た目の表す確率変数を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする。 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  とするとき、(1)  $\bar{X}$  の期待値  $E(\bar{X})$  と分散  $V(\bar{X})$  を求めよ。(2)  $n=3$  のとき、 $|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq 2\sqrt{V(\bar{X})}$  となる確率を求めよ。<考え方> (2) (1)で求めた期待値  $E(\bar{X})$  と分散  $V(\bar{X})$  を(2)の不等式に代入し、 $\bar{X}$  の範囲を求める。また、 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  であり、 $X_1 + X_2 + X_3$  は  $3 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 18$  を満たす自然数であるから、条件を満たす  $(X_1, X_2, X_3)$  の組が求められる。(1)  $X_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) の確率分布は次のようになる。

$X_k$	1	2	3	4	5	6	計
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって、

$$E(X_k) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{7}{2}$$

したがって、 $\bar{X}$  の期待値は、

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{7}{2} n = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

 $X_k$  の分散は、

$$\begin{aligned} V(X_k) &= E(X_k^2) - \{E(X_k)\}^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &\quad + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

より、 $\bar{X}$  の分散は、

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \end{aligned}$$

 $X_1, X_2, \dots, X_n$  は互いに独立であるから、

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{35}{12} n \\ &= \frac{35}{12n} \end{aligned}$$

◀  $a, b$  が定数のとき、  
 $E(aX + bY)$   
 $= aE(X) + bE(Y)$

◀  $a, b$  が定数で、 $Y = aX + b$  のとき、  
 $V(Y) = a^2 V(X)$

◀  $X, Y$  が独立のとき、  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

(2) (1)より,  $E(\bar{X}) = \frac{7}{2}$

また,  $n=3$  のとき,

$$\sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって,  $|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq 2\sqrt{V(\bar{X})}$  より,

$$\left| \bar{X} - \frac{7}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{35}}{3}$$

$$\bar{X} \leq \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{35}}{3} \leq \bar{X}$$

$n=3$  のとき,  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{n}$  であるから,

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \leq \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{35}}{3} \leq \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

よって,  $X_1 + X_2 + X_3 \leq \frac{21}{2} - \sqrt{35} \dots\dots ①$

$$\frac{21}{2} + \sqrt{35} \leq X_1 + X_2 + X_3 \dots\dots ②$$

ここで,  $5.5 < \sqrt{35} < 6$  より,  $4.5 < \frac{21}{2} - \sqrt{35} < 5$ ,

$16 < \frac{21}{2} + \sqrt{35} < 16.5$  であり,  $X_1 + X_2 + X_3$  の値は,

$3 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 18$  を満たす自然数であるから,

①より,  $X_1 + X_2 + X_3 = 3, 4$

②より,  $X_1 + X_2 + X_3 = 17, 18$

$X_1 + X_2 + X_3 = 3, 4$  となるのは,

$$(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$$

の4通り

また,  $X_1 + X_2 + X_3 = 17, 18$  となるのは,

$$(X_1, X_2, X_3) = (5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5), (6, 6, 6)$$

の4通り

つまり,  $|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq 2\sqrt{V(\bar{X})}$  を満たす  $X_1, X_2, X_3$  の出方は,  $4+4=8$  (通り)

また,  $X_1, X_2, X_3$  の出方は, 全部で

$6 \times 6 \times 6 = 216$  (通り) あるから, 求める確率は,

$$\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

$$\sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\bar{X} - \frac{7}{2} \leq -\frac{\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{\sqrt{35}}{3} \leq \bar{X} - \frac{7}{2}$$

$$5.5^2 = 30.25 < 35$$

$$1 \leq X_1 \leq 6, 1 \leq X_2 \leq 6, 1 \leq X_3 \leq 6 \text{ より, } 3 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 18$$

条件を満たす目の出方を具体的に考える。

14

平均が12.5, 標準偏差が4.2で, 正規分布に従う数の集合  $A$  がある. この集合のすべての数を4倍して5を加えて新たな集合  $B$  を作ることにする.

(1) 集合  $B$  に属する数の平均と標準偏差を求めよ.

(2) 集合  $B$  を母集団として, 大きさ64の標本を抽出する. その標本の平均が54より小さくなる確率を求めよ.

<考え方> (1)  $Y = aX + b$  ( $a, b$  は定数) のとき, 平均は  $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

標準偏差は  $\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

(2)  $X$  が正規分布に従うとき,  $Y = aX + b$  や  $\bar{Y}$  も正規分布に従うことを利用する.

**B2-38** (134) 第2章 確率分布と統計的な推測

- (1) 集合  $A$  の要素を  $X$  とすると,  $E(X)=12.5$ ,  $\sigma(X)=4.2$  である.

また, 集合  $B$  の要素を  $Y$  とすると,  $Y=4X+5$  である.

よって,  $Y$  の平均は,  $E(Y)=E(4X+5)$

$$=4E(X)+5$$

$$=4 \times 12.5 + 5 = 55$$

$Y$  の標準偏差は,  $\sigma(Y)=4 \cdot \sigma(X)=4 \times 4.2$

$$=16.8$$

- (2) (1)より,  $Y$  は正規分布  $N(55, 16.8^2)$  に従う.

また, 母集団  $B$  から大きさ 64 の標本を抽出するので, 標本平均を  $\bar{Y}$  とすると,  $E(\bar{Y})=E(Y)=55$ ,

$$\sigma(\bar{Y}) = \frac{16.8}{\sqrt{64}} = 2.1 \text{ より, } Z = \frac{\bar{Y}-55}{2.1} \text{ とおくと, } Z \text{ は標}$$

準正規分布  $N(0, 1)$  に従う.

$\bar{Y} < 54$  のとき,  $Z < \frac{54-55}{2.1} \div -0.48$  であるから,

$$P(\bar{Y} < 54) = P\left(Z < \frac{54-55}{2.1}\right)$$

$$\div P(Z < -0.48)$$

$$= 0.5 - P(-0.48 \leq Z \leq 0)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.48)$$

$$= 0.5 - 0.1844 = 0.3156$$

したがって, 標本の平均が 54 より小さくなる確率は

$$0.3156$$

◀  $X$  は正規分布に従い,  
 $Y=4X+5$  だから,  
 $Y$  も正規分布に従う.

**15**

ある農産生産物の長さの分布は, 母平均が  $m$  cm, 母標準偏差が 1.8 cm の正規分布に従っている. 大きさ  $n$  の標本を無作為に抽出し, 母平均  $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間を調べたところ,  $[23.696, 24.704]$  であった.

(1) 標本平均  $\bar{x}$  と  $n$  の値を求めよ.

(2) 母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間を推定せよ.

<考え方> (1) 母平均  $m$ , 母標準偏差 1.8 の正規分布に従うから, 母平均に対する信頼度 95%

の信頼区間は,  $\left[\bar{x} - 1.96 \times \frac{1.8}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \frac{1.8}{\sqrt{n}}\right]$  である.

- (1) 母平均  $m$  に対する信頼度 95% の信頼区間が

$[23.696, 24.704]$  より,

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{1.8}{\sqrt{n}} = 23.696 \quad \cdots \cdots ①$$

$$\bar{x} + 1.96 \times \frac{1.8}{\sqrt{n}} = 24.704 \quad \cdots \cdots ②$$

①+②より,  $2\bar{x} = 48.4$

よって,  $\bar{x} = 24.2$

$\bar{x} = 24.2$  を②に代入して整理すると,

$$1.96 \times \frac{1.8}{\sqrt{n}} = 0.504$$

すなわち,  $\sqrt{n} = \frac{1.96 \times 1.8}{0.504} = 7$

したがって,  $n = 7^2 = 49$

- (2) 標本平均が 24.2, 標本の大きさが 49, 母標準偏差が 1.8 であるから, 母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間は,

$$\left[ 24.2 - 2.58 \times \frac{1.8}{\sqrt{49}}, 24.2 + 2.58 \times \frac{1.8}{\sqrt{49}} \right]$$

すなわち,  $[23.537, 24.863]$

◀母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間は, 標本の大きさ  $n$  が大きいとき, 標本平均の値を  $\bar{X}$ , 母標準偏差を  $\sigma$  とすると,

$$\left[ \bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

16

ある地区の 100 組の夫婦を対象に, A 製品, B 製品のどちらを選ぶかを調査した. その結果, 夫の A 製品, B 製品の選択者数はそれぞれ 60 名, 40 名で, 妻の A 製品, B 製品の選択者数はそれぞれ 75 名, 25 名であった.

この地区全体について, 夫婦の選択が一致する確率を信頼度 95% で推定せよ. なお, 夫と妻が A, B いずれの製品を選択するかの確率は互いに独立であるとする. また,  $\sqrt{11} = 3.32$  として計算せよ.

<考え方> たとえば, 夫と妻の両方が A 製品を選ぶ確率は,  $\frac{60}{100} \times \frac{75}{100}$  である.

夫婦の選択が一致する標本比率が  $p_0$ , 標本の大きさが  $n$  のとき,

母比率に対する信頼度 95% の信頼区間は,

$$\left[ p_0 - 1.96 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, p_0 + 1.96 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right] \text{ である.}$$

A 製品, B 製品に対する選択比率は, それぞれ, 夫が 0.6, 0.4, 妻が 0.75, 0.25 であるから, 1 組の夫婦の選択が一致する確率は,

$$0.6 \times 0.75 + 0.4 \times 0.25 = 0.55$$

よって, 標本比率が 0.55, 標本の大きさが 100 より, 母比率に対する信頼度 95% の信頼区間は,

$$\left[ 0.55 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.55(1-0.55)}{100}}, 0.55 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.55(1-0.55)}{100}} \right]$$

よって,

$$\begin{aligned} 1.96 \times \sqrt{\frac{0.55(1-0.55)}{100}} &= 1.96 \times \sqrt{\frac{55}{100} \times \frac{45}{100} \times \frac{1}{100}} \\ &= 1.96 \times \frac{15\sqrt{11}}{1000} = 0.097608 \end{aligned}$$

より,  $[0.452, 0.648]$

◀ともに A を選ぶ確率は,  $0.6 \times 0.75$   
ともに B を選ぶ確率は,  $0.4 \times 0.25$

## B2-40 (136) 第2章 確率分布と統計的な推測

## ●章末問題 (p.B2-43)

1

−1, 0, 1, 2, 3 の数が書かれている札が, それぞれ 1 枚, 2 枚, 4 枚, 3 枚, 2 枚ずつ箱に入っている. これを母集団とし, 箱の中から無作為に 1 枚を抽出しては箱に戻す試行を  $n$  回繰り返す. 札に書かれた数を確率変数  $X$  とするとき,

(1) 母平均と母標準偏差を求めよ.

(2)  $k$  回目 ( $k=1, 2, \dots, n$ ) に取り出した札の数を  $X_k$  とする.

母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間の幅を 0.8 以下で推定するには, 試行回数  $n$  をどの程度の大きさとすればよいか.

(1) 母集団の確率分布は次のようになる.

$X$	−1	0	1	2	3	計
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

よって, 母平均は,

$$(-1) \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{2}{12} + 1 \times \frac{4}{12} + 2 \times \frac{3}{12} + 3 \times \frac{2}{12} = \frac{5}{4}$$

分散は,

$$V(X) = \left\{ (-1)^2 \times \frac{1}{12} + 0^2 \times \frac{2}{12} + 1^2 \times \frac{4}{12} + 2^2 \times \frac{3}{12} + 3^2 \times \frac{2}{12} \right\} - \left( \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{35}{12} - \frac{25}{16} = \frac{65}{48}$$

より, 母標準偏差は,

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{65}{48}} = \frac{\sqrt{195}}{12}$$

(2) 標本平均の値を  $\bar{X}$  とすると, 母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間は,

$$\left[ \bar{X} - 2.58 \times \frac{\sqrt{195}}{12} \times \frac{1}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sqrt{195}}{12} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

より, 信頼区間の幅は,  $2 \times 2.58 \times \frac{\sqrt{195}}{12\sqrt{n}}$  であるから,

$$2 \times 2.58 \times \frac{\sqrt{195}}{12\sqrt{n}} \leq 0.8 \quad \text{とすると,}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \times 2.58 \times \sqrt{195}}{12 \times 0.8} = \frac{43\sqrt{195}}{80}$$

平方すると,

$$n \geq \frac{43^2 \times 195}{80^2} = 56.3 \dots \dots$$

したがって,  $n$  を 57 以上とすればよい.

$$\blacktriangleleft V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

◀母平均  $m$  に対する信頼度 99% の信頼区間は, 標本の大きさ  $n$  が大きいとき, 標本平均の値を  $\bar{X}$ , 母標準偏差を  $\sigma$  とすると,

$$\left[ \bar{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



●思考力問題 (p.B2-43)

2

$n$  を自然数として1枚のコイン投げを  $2n$  回行う。この  $2n$  回のコイン投げで、表が出る合計回数を  $X$  とする。ただし、コインの表と裏の出る確率は等しいとする。次の各問いに答えよ。

(1)  $X$  の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ。

(2)  $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$  を求めよ。ただし、 $k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$  とする。

(3)  $P(X=k)$  を最大にする  $k$  の値を求めよ。

(4)  $n=200$  とする。試行回数が大きいとき、 $X$  の確率分布は正規分布で近似できることが知られており、試行回数400はこのような近似が成り立つのに十分大きいとみなせる。このことを利用して、 $X$  の値が

$$190 \leq X \leq 210$$

となる確率の近似値を求めよ。ただし、標準正規分布に従う確率変数  $Z$  に対する  $P(Z>1)$  の近似値としては0.159を用いよ。

(1)  $X$  は二項分布  $B\left(2n, \frac{1}{2}\right)$  に従うから、

$$X \text{ の期待値は, } E(X) = 2n \times \frac{1}{2} = n$$

$$\text{標準偏差は, } \sigma(X) = \sqrt{2n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2n}}{2}$$

$$(2) P(X=k) = {}_{2n}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \frac{2n!}{k!(2n-k)! \times 2^{2n}}$$

これより、 $P(X=k+1) = \frac{2n!}{(k+1)!(2n-k-1)! \times 2^{2n}}$  であるから、 $k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{2n!}{(k+1)!(2n-k-1)! \times 2^{2n}} \\ &\quad \div \frac{2n!}{k!(2n-k)! \times 2^{2n}} \\ &= \frac{1}{(k+1)k!(2n-k-1)!} \\ &\quad \div \frac{1}{k!(2n-k)(2n-k-1)!} \\ &= \frac{2n-k}{k+1} \end{aligned}$$

(3)  $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \geq 1$  を解くと、(2)より、

$$\frac{2n-k}{k+1} \geq 1$$

$$k+1 > 0 \text{ より, } 2n-k \geq k+1$$

$$k \leq n - \frac{1}{2}$$

$k$  は整数であるから、

$$0 \leq k \leq n-1 \text{ のとき,}$$

$$P(X=k) < P(X=k+1)$$

$$n \leq k \leq 2n-1 \text{ のとき,}$$

$$P(X=k) > P(X=k+1)$$

◀  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき、

$$E(X) = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad (q=1-p)$$

◀  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき、

$$P(X=k) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (q=1-p)$$

2

## B2-42 (138) 第2章 確率分布と統計的な推測

よって,

$$\begin{aligned}
 P(X=0) &< P(X=1) \\
 &< P(X=2) \\
 &< \\
 &\dots \\
 &< P(X=n-1) \\
 &< P(X=n) > P(X=n+1) \\
 &> P(X=n+2) \\
 &> \\
 &\dots \\
 &> P(X=2n-2) \\
 &> P(X=2n-1) > P(X=2n)
 \end{aligned}$$

であるから,  $P(X=k)$  を最大にする  $k$  の値は,

$$k=n$$

- (4)  $n=200$  のとき,  $X$  は二項分布  $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$  に従い, (1)よ

り, 期待値は  $n=200$ , 標準偏差は  $\frac{\sqrt{2n}}{2} = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10$  で

あるから,  $Z = \frac{X-200}{10}$  とおくと,  $Z$  の分布は標準正規分

布  $N(0, 1)$  とみなせる.

よって,

$$\begin{aligned}
 &P(190 \leq X \leq 210) \\
 &= P\left(\frac{190-200}{10} \leq Z \leq \frac{210-200}{10}\right) \\
 &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
 &= 1 - \{P(Z < -1) + P(Z > 1)\} \\
 &= 1 - 2P(Z > 1) \\
 &= 1 - 2 \times 0.159 \\
 &= 1 - 0.318 = 0.682
 \end{aligned}$$

◀  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき,  $n$  が大きければ,

$$Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \quad (q=1-p)$$

は, ほぼ標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う.

◀  $a > 0$  のとき,  
 $P(Z < -a) = P(Z > a)$